Dougall Edinburgh R.S. Trans. 41 (1904) Exact solutions of bending of plates for various distributions of load. 1

Compressibility : Quincke W. Ann ~~19, 401 (1883)~~
41, 663 (1890)
De Metz ~~47, 706 (1892)~~
Pagliani Accad. ~~8, 795, 1884~~
~~9, 149, 1885~~
~~14, 94, 1890~~

Heydweiller W. Ann ~~55, 1895~~, 59, 1896

Broglie CR 3,17 Mai 1909
Ehrenhoff Wied. Ann. Nov 1909
Ph 2 1909, 308

Langevin CR 140 p 35 (1905). Ann Ch Ph.

Whitehead Quart. J. math. 23 (1888) p. 78 (Hydrod.)

Kundt & Warburg Pogg Ann 156 p 177 (1875)

Lorenz H. Bemerkg. z. Eul. Knicktheorie   Z V d. Ing. 52, 827, 1908

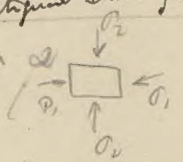
Kübler, Kriemler, Polyxin, Prandtl } Knickformel   Z V d Ing. 44 (1900)

Z Math Phys. 45–47 (1900–1902)

Greenhill } Stabilit. d. el. lin. deform. Säule } Camb Ph S Pr. 4 (1883) p 65

Chree   7 (1892) p. 283

Fitzgerald Phil Mag 33, 428 (1892)

Bryan Stabilit  Lond. Math S. Proc. 22 (1891) p 54

— 25 (1894) p 141

Dicke Platten: Love Elast. §43, 289 ff. Clebsch Elast. §45, 46

Encyklop. p. 187

Bemerkg. p. 201 180 ~~...~~ Balken mit ... (Pearson):

Pearson Quart J math. 24 (1889) p 63

Encykl. p 180

Michell Quart J math. 32 (1901) p 28

Kriemler: Labile u. stabile Gleichgewichtsfig. ... Karlsruhe 1902 Dissert.

Saalschütz D. belastete Stab Leipzig 1880

Larmor Lond Math S Proc 15 (1884) Stability of Elastica

~~Height of heavy column consistent with stability: Greenhill Camb Ph S Pr. 4 (1881)~~

~~Chree " " 7 (1892)~~

Hess ... Math Ann 23 (1884) 25 (1885)

Michell Stability of a bent & twisted wire Messenger of Math. Bd 19 ?

Basset Deformation of thin elast wires Am J. Math. 17 (1895)

Hertz Schwimmende Platten Wied. Ann 22 p 449 (1884)

Ges. Werke I p 288 (1895)

Bryan On the Stability of Elastic Systems Camb. Ph. S. Proc. VI (1889) p. 199

Wien U (I 47845)

displacements $u\ v\ w$

strains $e\ f\ g\ a\ b\ c$

elastic potential $\varphi = \frac{1}{2}(m+n)(e+f+g)^2 + \frac{n}{2}(a^2+b^2+c^2-4fg-4ge-4ef)$

potential of bodily forces V, of surface traction $\Gamma\, dS$

Whole pot. energy:

$$W = \overset{\mathrm{I}}{\iiint \varphi\, dx\,dy\,dz} + \overset{\mathrm{II}}{\iiint V\rho\, dx\,dy\,dz} + \overset{\mathrm{III}}{\iint \Gamma\, dS}$$

Equilibrium:

$$\delta W = \iiint \delta\varphi \ldots + \iiint \delta V \rho \ldots + \iint \delta\Gamma\, dS = 0$$

unstable if for <u>some</u> variations:

$$\delta^2 W = \iiint \delta^2\varphi + \iiint \delta^2 V + \iint \delta^2\Gamma\, dS < 0$$

$P\ Q\ R\ S\ T\ U$ = stress components $X\ Y\ Z$ bodily forces $F\ G\ H$ surface traction

$$\delta\varphi = P\delta e + Q\delta f + R\,\delta g + S\,\delta a + T\,\delta b + U\,\delta c$$

$$\delta^2\varphi = \delta P\,\delta e + \ldots\ldots = 2\varphi(\delta e, \delta f, \delta g, \delta a, \delta b, \delta c) \text{ essentially positive}$$

$$\delta V = -X\delta u - Y\delta v - Z\,\delta w$$

$$\delta^2 V = -\delta X\,\delta u - \delta Y\,\delta v - \delta Z\,\delta w = \delta u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \delta v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \ldots + 2\,\delta v\,\delta w \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}$$

$$\delta^2\Gamma = -\delta F\,\delta u - \delta G\,\delta v - \delta H\,\delta w$$

Instability therefore only possible if II + III negative and greater than I

If δe & δu were of the same order

instabil. would require $\frac{\partial V}{\partial x}$ to be of order m, n and the same of force $\frac{\partial V}{\partial x}$, but that would

produce <u>finite</u> strains which is impossible (except f. ex. jelly)

similarly with respect to self attracting forces and to Γ

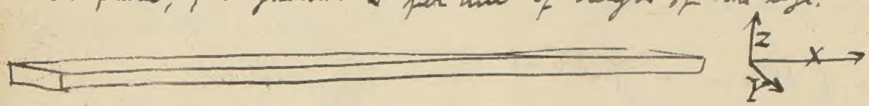
4). ∴ Instability possible only if δx .... are small in comparison with $\delta u, \delta v, \delta w$

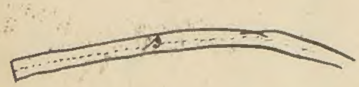
rigid body displacements generally unstable:

[Kirchhoff supposed $\delta V = \delta\Gamma = 0$]

Stability of Wires, Plates, Shells

5). infinitely long strip of breadth l, thickness $2h$, acted on by normal edge thrust in its plane, and of magnitude P per unit of length of the edge.





Work done in stretching the surface, by P, per unit length: (Rayleigh Sound I p. 136)

s = length measured along the new middle surface

$$P\int_0^l \left(\frac{ds}{dx}-1\right)dx = \frac{1}{2}P\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

Potential energy of bending: $\frac{4}{3}n h^3\left(\frac{m}{m+n}\right)\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx$

Hence stability if $\quad \frac{1}{2}P\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx < \frac{4}{3}n h^3\left(\frac{m}{m+n}\right)\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \qquad (12)$

for every possible deformation

If the edges are fixed $w=0 \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} \qquad w = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin\frac{r\pi x}{l}$

(12) requires $\quad \frac{1}{2}P\sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 \frac{r^2\pi^2}{l^2} < \frac{4}{3}n h^3 \frac{m}{m+n}\sum_1^{\infty} a_r^2 \frac{r^4\pi^4}{l^4}$

or $\quad P < \frac{8}{3}n h^3 (\quad) \cdot \frac{\sum r^4 a_r^2}{\sum r^2 a_r^2}$

for all values of the constants a_r.

Now $\dfrac{\sum r^4 a_r^2}{\sum r^2 a_r^2}$ will have a minimum value $=1$ when $a_2 = a_3 \ldots = 0$; $a_1 \gtrless 0$

$\therefore$ Plane form stable / unstable if $P \lessgtr \frac{8}{3} n h^3 \frac{m}{m+n} \frac{\pi^2}{l^2}$

critical state if $p = \frac{P}{2h} = \frac{4}{3} n h^2 \frac{m}{m+n} \frac{\pi^2}{l^2}$

[in the wire problem of Euler: $p = n k^2 \frac{3m-n}{m} \frac{\pi^2}{l^2}$]

b) Possibility of instability from general observations in connexion with Kirchhoff's th. of bent wires (Vorlesungen № 28)

II. What is the order of magnitude of the small strains produced in such the elastic solid when forces so great, that equilibrium may be unstable?

Conclusions: 1). If forces such as to produce bending the limiting thickness for wire or plate with (instability) ~~possible~~ of equilibrium is of same order as the total increase ~~of~~ in length of a bar of length = greatest linear dimension of plate or wire, when strain is greatest it will bear

2). If forces produce only extension or compression of the middle line, without bending the thickness must greater : = mean proportional between the length above mentioned and greatest linear dimension of the body

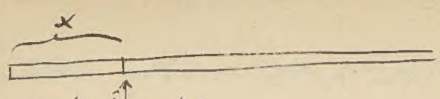
No case of instability possible for other displacements than pure bending or differing infinitely little from pure ~~bending~~ flexion or torsion.

Closed shell essentially stable!

---

p. 287: Application of the Energy Test to the Collapse of a long thin pipe under external pressure (Bryan).

(1). wire of length l under end thrust T



lateral displacement z

Potential energy due to longit. compr. will be diminished by the quantity

α). $T\int_0^l \left(\frac{ds}{dx}-1\right) dx = \frac{T}{2}\int\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx$ Rayleigh p 184 !

while the pot. energy due to bending will be increased by

β). $\frac{1}{2}\int_0^l \frac{EI}{\rho^2}\, dx = \frac{EJ}{2}\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 dx$

If in stable equilib. pot. energy must be increased by any displacement ∴

die Endpunkte ändern sich nicht bei der Variation

$$\beta - \alpha > 0$$

$z = \sum a_n \sin n\frac{\pi x}{l}$ if ends fixed

$$\therefore\quad \frac{EJ}{2}\sum a_n^2 \frac{n^4\pi^4}{l^4} - \frac{T}{2}\sum a_n^2\frac{n^2\pi^2}{l^2} > 0$$

if all except one vanish: $T < EJ\frac{n^2\pi^2}{l^2}$

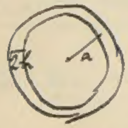
least if $n=1$

$$T = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \quad \text{(Euler)}$$

---

(2) Stability of tube

P external pressure, thrust across any generating line: $T = Pa$



Potential energy of bending of the element ds — $\frac{1}{2}\beta\, ds\left[\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^2$

$$\beta = \frac{2}{3}\frac{h^3 E}{1-\sigma^2}$$

Slight displacement:

$r = a + \delta r \qquad \varphi = \theta + \delta\theta$

e = extension of element ds whose original length was $a d\theta$:

$$(a\,d\theta)^2(1+e)^2 = ds^2 = (d\,\delta r)^2 + (a+\delta r)^2(d\theta + d\delta\theta)^2$$

$$\therefore \quad (1+e)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{d\delta r}{d\theta}\right)^2 + \left(1+\frac{\delta r}{a}\right)^2\left(1+\frac{d\delta\theta}{d\theta}\right)^2$$

$\therefore$ to second order:

$$2e+e^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{d\delta r}{d\theta}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta r}{a} + \frac{d\delta\theta}{d\theta}\right) + \left(\frac{\delta r}{a} + \frac{d\delta\theta}{d\theta}\right)^2 + 2\,\frac{\delta r}{a}\,\frac{d\delta\theta}{d\theta}$$

Now extension of the surface must vanish to the first order of small quantities (p. 210)

$$\frac{\delta r}{a} + \frac{d\delta\theta}{d\theta} = 0 \qquad (2)$$

therefore to the second order

$$2e = \frac{1}{a^2}\left(\frac{d\,\delta r}{d\theta}\right)^2 + 2\,\frac{\delta r}{a}\,\frac{d\delta\theta}{d\theta}$$

$$\frac{\delta r}{a} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right)$$

By (2): $\quad \delta\theta = \sum\left(-\frac{A_n}{n}\sin n\theta + \frac{B_n}{n}\cos n\theta\right)$

Total increase in circumference is $\displaystyle\int_0^{2\pi} e\,a\,d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\delta r}{d\theta}\right)^2 + 2\,\frac{\delta r}{a}\,\frac{d\delta\theta}{d\theta}\right]d\theta$

$$= \frac{\pi a}{2}\sum\left[(n^2-2)(A_n^2+B_n^2)\right]$$

Hence work done by T $= \frac{\pi a}{2}\,T\sum\left[(n^2-2)(A_n^2+B_n^2)\right]$

so that increase of potential energy $\delta W_1 = -$

volume of cylinder per unit length: $= \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \cdots = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\,\frac{\delta r}{a} + \frac{d\delta\theta}{d\theta} + \left(\frac{\delta r}{a}\right)^2 + 2\,\frac{\delta r}{a}\,\frac{d\delta\theta}{d\theta}\right)d\theta$

$$= \pi a^2 \underbrace{- \frac{\pi a^2}{2}\sum(A_n^2+B_n^2)}$$

thus increase of volume $=$ (the braced term)

increase of potential energy due to work against external pressure:

$$\delta W_2 = -\frac{\pi a^2}{2}\,p\sum(A_n^2+B_n^2)$$

Increase of pot. en. due to bending, as shown by Rayleigh loc. cit:

$$\delta V = \frac{\pi\beta}{2a} \sum (n^2-1)^2 (A_n^2 + B_n^2)$$

Circular form stable if for any displacement:

$$\delta V + \delta W_1 + \delta W_2 > 0$$

$$\therefore \quad \sum \left[\frac{\beta}{a^3} (n^2-1)^2 - P(n^2-1) \right] (A_n^2 + B_n^2) > 0$$

if all AB vanish except $A_n B_n$:

$$P < \frac{2}{3}(n^2-1) \frac{h^3}{a^3} \frac{E}{1-\sigma^2}$$

least collapsing pressure: $n = 2$:

$$P = 2 \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{h}{a}\right)^3$$

f compression along circul. section: $\frac{E}{1-\sigma^2} 2hf = T = Pa$

$$f = \frac{h^2}{a^2}$$

For $\frac{h}{2a} = \frac{1}{100}$

Glass 0·88 atm.

Steel 4·73

But it does not want to burst

Effect of pressure on vibrations: (Rayleigh): $p^2 = \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \left[\frac{\beta}{\rho a^3} - \frac{P}{(n^2-1)\rho} \right]$.

Grüneisen Ann 26 p 211 [illegible]

Empirisch: $\frac{\text{Ausdehnungscoeff}}{\text{spec. W.}}$ } [illegible] unabhängig v. Temperatur

z.B. Al.

	−173	−100	0	100	300	438
$\alpha \cdot 10^6 =$	13·6	18·2	23·0	24·9	29	25·8
$c_p =$	(0·127)	0·167	0·210	0·223	0·243	0·265
$\frac{\alpha}{c_p} \cdot 10^6 =$	(107)	109	110	112	119	112

Ebenso Eisen Nickel Cu Pd Ag Pt Ir

Slotte [illegible] Finska Vet.-Soc. Förhandlingar 44 (1902) Sitzung (13) [illegible]

[illegible] $\frac{\alpha}{c_p} = \text{const}$ [illegible]

[illegible] Gesetz für Ag 13 [illegible]

Grüneisen Ann 26 p. 393 [illegible] Compr., th. [illegible], Atomvol. [illegible]

Richards [illegible] Compressib. eine period. Fu (Atom [illegible])

Z. phys Ch 61 p 77, 171, 183 (1907)

Slotte 35 p 16 (1893) 48 (1906) [illegible] Ann 11 p 657 (1903). Sitzung (37)

Virialgleichung differenziert gibt:

$$v \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{3\alpha v}{\kappa} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial T}\left\{\sum m\overline{c^2} + \sum \overline{r f(r)}\right\} \qquad \sum \frac{m c^2}{2} = \frac{3}{2}RT$$

Kraft [illegible] anziehend $-f_1(r)$ [illegible] abstoss. $+f_2(r)$

wenig mit temp. veränderl. Potential $\Phi_2(r) = \frac{\alpha}{r^\nu}$ ∴ $f_2(r) = \frac{\nu}{r}\Phi_2(r)$

$$\sum \overline{r f(r)} = \nu \sum \Phi_2 = \nu U_2$$

$$\int_0^T C_p\,dT = \Sigma\frac{mu^2}{2} + U_1 + U_2$$

$$C_v = \frac{3}{2}R + \left(\frac{\partial U_2}{\partial T}\right)_v$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\Sigma\, r f_2(r)\right)_v = \nu\left(C_v - \frac{3}{2}R\right)$$

$$(7)\qquad \frac{3\alpha v}{\kappa} = R + \nu\left[\frac{C_v}{3} - \frac{R}{2}\right]$$

nicht streng wenn $C_v = 3R$

$$\therefore\quad \frac{3\alpha v}{\kappa} = \frac{\nu+2}{2}\cdot R$$

Spannungscoeff. = bestimmtes Vielfache d. Atomzahl in Vol Einh.

Tatsächlich ist $\frac{3\alpha v}{\kappa}$ und $\frac{3\alpha v}{\kappa C_p}$ ~~beinahe~~ ähnlich constant

Antimon u. Bi ganz abweichend

$5.9 \cdot 10^8$

$\nu = 12$

$\frac{C_p}{C_v} = 1 + 3\alpha T\left(\frac{3\alpha v}{\kappa C_v}\right)$ berechnet:

z. B.

Na	1·067	
Al	1·044	
Fe	1·014	
Cu	1·026	etc.

auch für Si und flüssiges Cl

$$\frac{3\alpha v}{\kappa} = 7\cdot 10^8 \qquad 5\cdot 10^8$$

Phil Mag. 17 p. 192 (1909)
Dunston Coefficient of Viscous Traction of Lead & tin alloys

$\frac{501.}{0.01 \frac{\pi}{4}} = \frac{200}{314}$ kg $= 67$ kg

$= 66$ atm.

100 atm.

$\frac{754}{501} = 1.5$

132

$\frac{1016}{501} = 202$

1302

$\frac{1316}{314} = 263 \cdot \frac{2}{3}$

13

526

175

$\frac{2}{3\frac{1}{7}} = \frac{7 \cdot 2}{22} = \frac{7}{11}$

.3.6. 76

952
816
1034

Trouton Proc R S. 77 p. 426 (1906)

Siehe pag 561!!

			Elastic. Modul		562)
Druckfestigkeit (Wr. Ndrmas)	Granit	15 – 22	2400	2450 Dr.	4200 – 1100
	Marmor	7 – 25	3000		7000 – 3300
	Porphyr	25			
	Diabas	27			
	Basalt	13			
	Gneis	2.5 – 8			
	Sandstein	6 – 10	800	630	(700 – 1100)
	Schiefer		1000		

$$H_2^\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-ix}\, e^{i\frac{\pi\alpha}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$ für große x. entwickeln

Für α groß gegen x:

$$H_2^\alpha(x) = \frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\left(\frac{2}{x}\right)^{\alpha} \alpha^\alpha e^{-\alpha}$$

Für $\alpha < x$ x groß gegen 1

$$\frac{\alpha}{x} = \cos\tau_0$$

$$H_2^\alpha(x) = \frac{1}{\pi} e^{-ix(\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0)}\left[\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}\Gamma(\frac{1}{2})}{(\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$

$\alpha \cong x$ $\quad \alpha = (1-\varepsilon)x$

für $\varepsilon = 0$

$$H_2^\alpha(x) = \frac{2i}{3\pi}\left[e^{-\frac{i\pi}{6}}\, 6^{\frac{1}{3}} \sin\frac{\pi}{3}\, \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{x^{1/3}} + \cdots\right.$$

Für $\alpha > x$

$$H_2^\alpha(x) = \frac{i}{\pi} e^{-i\alpha(\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0)}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(i\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{1/2}} - \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\operatorname{ctg}^2\tau_0\right)\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(i\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{3/2}} + \cdots\right]$$

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left[H_1^\alpha(x) + H_2^\alpha(x)\right]$$

$A_0(\tau_0) = 1$

$A_1(\tau_0) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \operatorname{ctg}^2 \tau_0$ $\qquad \frac{n+1}{1!\,2} \quad \frac{(n+1)(n+3)}{2!\;2^2}$

$A_2(\tau_0) = \frac{3}{128} + \frac{7}{576} \operatorname{ctg}^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \operatorname{ctg}^4 \tau_0$ $\qquad \frac{n+1}{1!\,2} \quad \frac{(n+1)(n+3)}{2!\;2^3}$

$\alpha < x \qquad \cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x}$

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=n} A_n \tau_0 \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(\frac{x}{2} \sin \tau_0)^{n+\frac{1}{2}}} \cos\left[x(\sin\tau_0 - \tau_0 \cos\tau_0) - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right]$$

$\alpha > x \qquad \cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x}$

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} e^{ix(\sin\tau_0 - \tau_0 \cos\tau_0)} \sum_0^n A_n(\tau_0) \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(i\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{n+\frac{1}{2}}}$$

α ungefähr gleich $x \qquad \frac{\alpha}{x} = 1 - \varepsilon$

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{1}{3\pi} \sum_0^n B_n(\varepsilon x)\, 6^{\frac{n+1}{3}} \sin(n+1)\frac{\pi}{3} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{3})}{x^{\frac{n+1}{3}}}$$

$B_0(\varepsilon x) = 1$

$B_1(\varepsilon x) = \varepsilon x$

$B_2(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} - \frac{1}{20}$

$B_3(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^3 x^3}{6} - \frac{\varepsilon x}{15}$

$B_4(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^4 x^4}{24} - \frac{\varepsilon^2 x^2}{24} + \frac{1}{280}$

$C_0 = -i \sin \tau_0$

$C_2 = i \frac{\sin\tau_0}{4!} \qquad C_3 = \frac{\sin\tau_0}{5!}$

$a_0(n) =$

[illegible]

Schmidt Z. ph. Ch. 15 p. 56 (1894)

Feiner Sand entsteht aus äquivalenten Salzlösungen gleiche Salzäquivalente

---

Ehrenhaft E. Methode z. Bestimmung d. elektr. Elementarquantums (Ber. 118 p. 321 (1909)

Einwände: 1). Gar kein Grund vorhanden anzunehmen dass jedes Teilchen gerade ein Elektron trägt

2). Anwendung d. Formeln auf Metallteilchen unrichtig

$$\underbrace{\omega = \frac{e}{6\pi\mu a} \qquad u = \frac{2}{9}\frac{g a^2}{\mu}\rho}$$

$$e = \frac{18\pi\mu^{3/2}}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{u}{\rho}}\,\omega$$

$$\overline{w} = \frac{e}{6\pi\mu}\left(\overline{\frac{1}{a}}\right) \qquad \overline{u} = \frac{2}{9}\frac{g\rho}{\mu}\left(\overline{a^2}\right)$$

$$a = a_0 + \xi \qquad \ldots\left(e^{-\alpha\xi^2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,d\xi\right)$$

$$w(x\ldots x+dx) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha x^2}dx$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = 1$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx\,x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \underbrace{e^{-z^2}z\,dz}_{-\frac{e^{-z^2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} = \text{mittl. Abweichung}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+\xi}\,e^{-\alpha\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha(z-a)^2}}{z}\,dz = \qquad a+\xi = z$$

Przyjmę dla uproszczenia dwa rodzaje $a_1\, a_2$

$$a_{1,2} = a\left(1 \pm \frac{1}{3}\right)$$

$$\bar{\omega} = \frac{e}{6\pi\mu a}\,\underbrace{\left(\frac{1}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3}}\right)}_{2} = \frac{9}{8}\,\frac{e}{6\pi\mu a} \qquad u = \frac{2}{9}\,\frac{g\rho}{\mu}\,a^2\,\underbrace{\frac{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}{2}}_{\frac{10}{9}}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3\cdot 12}{32} = \frac{9}{8}$$

$$e = \bar{\omega}\cdot 6\pi\mu a\cdot\frac{8}{9} = 6\pi\mu\bar{\omega}\sqrt{\frac{9u\mu}{2\rho g}}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{9}{10}}\cdot\frac{8}{9}}$$

$$\sqrt{\frac{8\cdot 8}{10\cdot 9}} = \sqrt{\frac{64}{90}} = 0{\cdot}843\ldots$$

8064
−8532
8520
9260

czyli wynosiłoby $e = \cancel{8}\ 4{\cdot}6\ .\ 0{\cdot}843$

3372
5058

$e = \underline{\underline{3{\cdot}88}}$!

CR 146 p. 530

Langevin sur l. th a. m. d   énergie cinétique moyenne $\frac{RT}{2N}$ $\xi = \frac{dx}{dt}$

$m\overline{\xi^2} = \frac{RT}{N}$ $Nm\overline{\xi^2} = RT$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a\frac{dx}{dt} + X$ X force complémentaire indifféremment + et −, et a grandeur telle qu'elle maintient l'agitation de la particule que, sans elle, la résistance visqueuse finirait d'arrêter

$\frac{m}{2}\frac{d^2x^2}{dt^2} - m\xi^2 = -3\pi\mu a\frac{d(x^2)}{dt} + Xx$ la moyenne $\overline{Xx}$ pour un grand nombre de molécules est évidemment nulle à cause de l'irrégularité des actions complémentaires

$\frac{dx^2}{dt} = z$

$\frac{m}{2}\frac{dz}{dt} + 3\pi\mu a z = \frac{RT}{N}$

$z = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a} + Ce^{-\frac{6\pi\mu a t}{m}}$

$\therefore \frac{d(x^2)}{dt} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a}$ régime permanent

$\overline{x^2} = \overline{x_0^2} + 2\overline{x_0\Delta x} + \overline{\Delta x^2}$, $\overline{x_0\Delta x} = 0$

$\overline{x^2} - \overline{x_0^2} = \frac{RT}{N}\frac{\tau}{3\pi\mu a}$ déplacement Δx $\therefore x = x_0 + \Delta x$

$\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \overline{x_0^2} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a}\tau$

Smoluch. Annal.

---

p. 907   94·586 cm^3 d'émulsion contient 48·299 eau   0·252 gommegutte $\therefore$ densité 1·35   centrifugeur après décaptation les particules microscopiques

répartition dans une couche de 0·12 mm après quelques heures

~~—~~ si concentration à un certain niveau = 100

			progression géométrique
dans les niveaux qui sont ~~—~~ 25 μ	plus bas	116	119
50		146	142
~~—~~ μ		170	169
100		200	201

chute des particules dans un vertical tube capillaire 0·97 mm par jour

$\therefore m(\text{nom}) = 9{\cdot}80 \cdot 10^{-16}$

donc fonctionnent comme molécules avec un poids moléculaire égal à $33 \cdot 10^9$ $N = 6{\cdot}7\, 10^{23}$

p 1024 Henri Étude cinématographique des mvts br.

latex condition dilué 500 fois grains environ 1μ diamètre (même à l'ultramicroscope ?)

densité 0'98 (déterminé ?)

(du latex) avantage) : uniformité des grains et faible densité

par conséq. on n'observe pas la répartition en hauteur de M. Perrin.

objectif apochr. de Zeiss 2 mm cinématographe.
oculaire de projection 4 distance 24 cm
grossissement 600 , source éclairante lampe à arc 30 Amp.

vingt images par seconde durée de chaque pose = $\frac{1}{320}$ sec

Résultats
Ifym trajectoires indépendantes même pour des particules à distances de 2μ

déplacements moyens pour dix grains (16 déterm. success.)

0'58, 0'55 0'52 0'56 70 64 67 71 55 70, μ

$\Delta = 0'62\mu$

la formule d'Einstein donnerait $\Delta = 0'16\mu$

$$\Delta^2 = \frac{RT}{N}\frac{\vartheta}{3\pi\eta r}$$

$R = 8'31 . 10^7$
$T = 290°$
$N = 7 . 10^{23}$
$\eta = 0'013$
$r = 0'5 . 10^{-4}$
$\tau = \frac{1}{20}$

mesures de quatre images à quatre $\tau = \frac{4}{20}$

$\Delta = 1'11\mu$ au lieu de 1'24 . accord suffisamment bon

possible que loi de Stokes n'est pas applicable

---

147 p. 62 Henri, Influence du milieu sur le m^t Br.

latex est coagulé par des acides (les granules se réunissent entre eux en formant ~~un chap~~ réseau à mailles très fins)

" agglutiné alcalis amas de granules irréguliers ne présentant ~~pas~~ aucune structure définie.

microphotogr. avec latex + quantité croissante ~~Hacide~~ HCl, acide. ;

pour des doses qui ne produisent pas de coagulation urée ne coagule pas, n'est pas électrolyte
alcool est un coagulant

Résultats: Les m b sont ralentis par l'addition d'un agent coagulant, avant le phénomène de coagulation. En présence d'alcali, ces mouv. sont 2 fois plus lents
acide 9

déplacement moyen en $\frac{1}{20}$ sec.:

H_2O	:		$0{\cdot}62\ \mu$
Soude	$NaOH$	$\frac{1}{10}N$	$0{\cdot}31$
HCl		$\frac{1}{92}N$	$0{\cdot}07$

avec l'acide acétique le même ralent. mais on est obligé de prendre une dilution de $\frac{1}{1000}$ normale
puisqu'il coagule pour une dose beaucoup plus faible

? si ce n'est pas dû à de variation d'électrisation des granules produites par les ions H, OH
donc pour examiner cette ? : addition d'alcool
ralentissement aussi intense qu'avec l'acide
addition de l'urée qui ne produit pas de coagulation ne change pas les m b.

Il semble donc qu'on doive chercher l'explication dans l'adsorption de l'agent coagulant par les granules du latex. En effet les mesures d'adsorption ont montré que ces granules absorbent un peu les alcalis, très fortement les acides, donc il se formerait autour de chaque ~~~~ granule une zone d'adsorption contenant des molécules de l'agent coagulant qui sont retenues par la granule.

Duclaux Pression osmotique et m br p. 131

Objection contre Perrin:

1). gomme gutte n'est pas insoluble filtrant par collodion proportion réellement dissoute $= \frac{23}{100}$
donc densité $1{\cdot}24$ au lieu de $1{\cdot}35$

on ne peut pas diluer mais devrait faire les mesures dans une solution diluée

2) égalité de grandeur ?

3). calcul de r par formule de Stokes hasardeux, numération directe préférable

qu'on peut effectuer sans difficulté par un procédé que j'ai étudié avec M. Russenberger 1)

viz: diluer une goutte de l'émulsion dans la gélatine à $\frac{9}{100}$, filtrée chaud sur collodion, qui arrête le mouv. b. et permet dénombrer et dénombrer les particules

difficultés au point de vue théorique: mode de calcul trop simple $\frac{\partial n}{\partial h}$? si l'on peut traiter la concentration comme fonction définie et continue en chaque point ?
(Planck)

mais l'ordre de grandeur semble donné

mais pour des colloïdes véritables et non pas des suspensions on devrait tenir compte surtout de la charge électrostatique

Cette théorie ↑ rend compte beaucoup mieux (que la th. moléc. osmotique) des propriétés des colloïdes en particulier du phén. de coagulation qui est presque inconcevable par la cinétique

Une hyp. simple: pression osmotique est la même que d'une solution ordinaire renfermant des mêmes charges électriques libres à l'état d'ions

cela revient à admettre qu'un ion exercera la même pr. osm. qu'il soit libre ou bien fasse partie de la couche extérieure d'une micelle (granule avec revêtement extérieur d'ions)

on peut connaître cette charge par la conductibilité propre des micelles – différence conduct. du liquide total et celle de l'intermicellaire extrait par une filtration sur collodion

connaissant de plus la vitesse de transport électrique des granules on a tous les éléments pour déterminer leur charge, le nombre d'ions extérieurs et la pression osmotique qu'elles exerceraient s'ils étaient libres.

Hydrate ferrique pression observée:

	117	130	83	110	46	74	81	104	9	23
calc	170	159	113	163	51	106	194	170	19	40
Rap.	1·45	1·22	1·36	1·48	1·10	1·43	2·40	1·64	2·10	1·74

Donc tout aussi bon accord qu'avec la th. cinétique
avantage : vrai colloïde, pas suspension
En outre j'espère de démontrer que la cinétiq. devrait tenir compte de l'existence de la couche double, et de la pression osmotique qu'exercent les ions de cette couche double
il semble qu'on retomberait alors sur la théorie électrostatique proposée

---

Perrin p. 530 . L'origine du m. b.

$r = 0{,}21\,\mu$

niveaux	h	h+40ᵘ	80	120	
	100	47	22.6	12	
	100	48	23	11.1	naturellement seulement pour concentr. diluée

on a pu seulement déceler une pression osmotique sur des solutions colloïdales concentrées. (Malfitano Duclaux)

les calculs s'appliquent aussi peu à ce cas que la formule de Laplace à l'air quand il a la densité de l'eau

Peut-être modification analogue à V.d.W.

Erreur dans ρ juste

Avec ces rectifications la première émulsion donne $N = 5{,}7 \cdot 10^{23}$

Avec nouvelle émulsion où les granules étaient 8 fois plus lourds $N = 6{,}0 \cdot 10^{23}$

27 $5{,}4 \cdot 10^{23}$

pas de doute sur la th. cinét.

---

p. 1044. Chaudesaigues L. m. b. et la formule d'Einstein

~~Hauss~~ Rayon exactement connu

Perrin : addition d'une trace d'acide bien qu'elle change ~~modifie~~ le signe de l'électrisation de contact ne change pas le m. b. de particules éloignées des parois

à la chambre claire
position dans des intervalles 0 30 60 90 120 sec.

camphre 40 grains $r = 0.45\mu$

" 150 } 0.213

sucrée (1.2 plus visqueuse que l'eau)

" (4.6 ")

Résultats : 1). Rapp rayons 2.1 rapp inverse des Δ^2 2.0

2). ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

temps(?) 6.7 9.3 11.8 13.75

$\sqrt{t}$ exigerait 6.7 9.46 11.6 13.4

3). rapp. Δ 1.8

rapp $\sqrt{\mu}$ 2

moyenne donne pour $N = 64 \cdot 10^{22}$ Concordance avec loi d'erreurs

---

Math Ann 67 p 387 (1909)

Hertz [illegible]

[illegible]

$W(r)$ [illegible]

$w(r)\,dr$ $< r < r + dr$

$$W(r) = \int_0^r w(\rho)\, d\rho$$

$$W = 1 - e^{-nk}$$

$$w = n k' \left(= \frac{dk}{dr}\right)$$

$n =$ [illegible] (pro Vol.)

$K(r) =$ Grösse einer Kugel vom Radius r und ν Dimensionen

Stringer: $w = k' n\, e^{-nk}$

[illegible]

[illegible]

[illegible] Würfel argument $r = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

$W(r)$ [illegible] $< r$ [illegible]

$W(r' r'')$ [illegible] $r_1 < r_2$

~~[illegible]~~ $w(r)\,dr$ $r < \ldots r+dr$

$$W(r_2) = W(r_2 r_1) + W(r_1) \qquad W(r_3, r_1) = W(r_3 r_2) + W(r_2 r_1)$$

$$W(r, r+dr) = w(r)\,dr$$

$$\therefore \quad W(r) = \int_0^r w(\rho)\,d\rho$$

[illegible] $[1 - W(r)]$ [illegible]

$$1 - W(r) = \left[nk\, e^{-nk} \overset{r}{=} \nu e^{-\nu}\right] = e^{-\nu}$$

Ansatz: $w = k'n\, e^{-nk}$

$$\therefore \quad \bar W = \int_0^r k'n\, e^{-nk}\,d\rho = \int_0^r \frac{\partial}{\partial\rho}(nk)\, e^{-nk}\,d\rho = -e^{-nk}\Big|_0^r = (1 - e^{-nk})$$

$$1 - W = e^{-nk}$$

[illegible] $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$

[illegible] $\bar W(e_{1/2}) = \frac{1}{2}$

$k(e_{1/2}) = \frac{1}{2}$ [illegible]

Argument [illegible] $w(r) =$ Maxim. [illegible] $\frac{k''(a_w)}{k'^2(a_w)} = n$

[illegible]

$$\bar a = \int_0^\infty r\, w(r)\,dr = \int_0^\infty e^{-nk}\,dr$$

$r=1$ $\quad \alpha_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \lg 2$

$\alpha_h = 0$

$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}$

$r=2$ $\quad \alpha_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\lg 2}{\pi}}$

$\alpha_h = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}$

$r=3$ $\quad \alpha_{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \lg \frac{2}{\pi}}$

$\alpha_h = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$\bar{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \; \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$

$r=4$ $\quad \alpha_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{2 \lg 2}$

$\alpha_h = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$

$\bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{2} \; \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$

Ose Physik Zeitschr.!

Woudstra Z. phys. Ch. 63 p. 619 (1908) Viscos. d. colloid. Ag-Lösungen!

Wegen [illegible] [illegible] Nichtabhängigkeit [illegible] Drude 33 p. 1111

Perrin CR. 147 p. 594 [illegible] $e = 4{,}1 \cdot 10^{-10}$

Seddig [illegible] Temp. [illegible] Habilitationsschrift [illegible] Frankfurt a. M. 1909

Physik. Zs., für die Kolloidchemie Diss. München 1908

Gibbs [illegible] nimmt mit Temp. zu, ebenso mit Dichte

[illegible] Temp. [illegible]

[illegible] Temp. [illegible]

Ion Vol. I No 6 May 1909 single copies 6s net
Vol. 30s.
16 Heathfield Gardens, Turnham Green London W

G. J. Stevens ~~The~~ Massing of Spheres Part I Price 2/6 net postage 1½ d.

J. Haslam & Co 15 Broad St. Place London E C

Rivista di Scienza Scientia 4 Parts 25 fr. Milano Via Aurelio Saffi II

La Revue du Mois (Cotton, Langevin, Perrin) 2 Bd Arago Paris XIII 25 fr.

Duclaux J. de chim. phys. 5, 29 (1907) Rech. sur l. subst. colloid.

Freundlich Z. f. Ch. u. Ind. d. Kolloide × Coll. fällung u. Adsorption 1, 321 (1907)

Jan p. 373

Svedberg 1). gives description of his method

2). against Freundlich's view that electric charge is cause of B. m.

if so motion should cease at the isoelectric point

Linder & Picton say J. Ch. Soc. 78, 1906–1936 (1905) that retardation of movements is connected with increase of size of particles (2)

other order of magnitude of these movements and of movements of Lo & Roth or Burton

For experiments used Ag hydrosol : according to Burton can be made isoelectric by

by very dilute $Al_2(SO_4)_3$

found isoelectric point ca $59 \cdot 10^{-6}$ g $\frac{Al}{1000\ cm^3}$ colloid

Out velocity of Br. m. was unchanged

3). ~~p. 377~~ confirmation of theory: $R = 8{\cdot}31 \cdot 10^7$, $N = 4 \cdot 10^{23}$, $T = 292$, $P = 25 \cdot 10^{-7}$

motion corresponding to $2A$ and time $\frac{\tau}{2}$

Acetone $\frac{\text{found}}{\text{calc.}}$ ..

:

n Propylalc. 6. generally $A = 1{\cdot}63 \sqrt{\tau} \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi \eta P}}$

according to Smol. $\uparrow$ 2·9 ... 4·2

Perrin, Comptes rendus # ... Henri

Chabasite [illegible] Atmolyse [illegible]

p. 556

	H_2	CO_2
$\frac{a}{x}$ = 15.9	0.28	1.36
8.3	.38	.32
4	.5	.29
[illegible]	.51	.21
0.22	0.16	1.00
[illegible]	[illegible]	0.87
0.15	[illegible]	[illegible]
1.16	.71	0.62
[illegible]	.82	—

$O_2 = 1.00$

[illegible]

[illegible]

p. 557

[illegible]

[illegible] = 0.42	[illegible] 47	8.45 [illegible]
0.18	[illegible]	
0.93		[illegible]

[illegible] ✓

[illegible]

p. 579 Atmolyse

pro Stunde

[illegible] cm.

1.5

von [illegible]

% O	[illegible]	O	N	cm^3 [illegible]
22.5	77.5	13	87	1.88
34	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] 15
40	60	[illegible]	[illegible]	[illegible]
55	45	40.5	57.5	[illegible] 14
81	19	[illegible]	[illegible]	[illegible] 10

[illegible] 10

[illegible]

Atmolyse

[illegible] O_2 1.10 cm³ [illegible] 3 · 3 [illegible]

[illegible] H_2 4.10

[illegible] O_2 [illegible] 21.7

[illegible] H_2 2.05 [illegible]

[illegible]

[illegible]

Pr. R.S. 83 A 254 1910,
Conduction of heat through rarefied gases

F. Soddy & A. J. Berry [illegible]

[illegible] degree of [illegible]
[illegible] 78 [illegible]

Crookes [illegible] 31 [illegible]
[illegible] [illegible] heat transmission [illegible] up to
a few 10^{6} atm
[illegible]
[illegible]

Pt strip stretched out in narrow tube and
[illegible], independent of [illegible] ~~temperature~~
[illegible] 2 [illegible]

[50 cm long 0.244 [illegible], [illegible]]

current adjusted [illegible] constant [illegible] temperature of [illegible]

Radiation Loss: exhausting ~~and~~ O [illegible], exhausting and [illegible]

[illegible]
0.049 watt
then [illegible] cooled in liquid air [illegible] 0.0465 [illegible]
0.05
Conductivity [illegible] beyond 15 mm for other gases
10-20 mm for H_2 and He
[illegible]

H_2	8.7[illegible]	O_2	1.55	A	1.07
He	[illegible]	N_2	[illegible]	Cyanogen C_2N_2	0.97
CH_4	[illegible]	CO	[illegible]	N_2O	0.9[illegible]
Ne	2.35	C_2H_4	[illegible]	CO_2	0.9[illegible]

with 1.05 [illegible]

A [illegible] to define
[illegible] of low press. ~~[illegible]~~ $K =$ cal. per cm^2 per sec 0.01 mm pressure
of hot surface

$K \times 10^{5}$					
A	1.30	He	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Ne	[illegible]	CO	[illegible]	C_2N_2	[illegible]
CO_2	1.[illegible]	N_2O	2.[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	N_2	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible] of heat theory

number of impacts $\frac{n\,g}{6}$ n = number of mol. per cm³ at [illegible] and 1·01 mm

g = mean velocity

average amount of heat required to raise one molec. by 1° is $\frac{L}{N}$ = molec. heat at const. vol.

N = number of molecs in 1 g mol

$$\therefore \varphi = \frac{n}{N}\,\frac{L\,g}{6}$$

For oxygen L = 5 [illegible] = 4·25, 10^{4} ; $\frac{n}{N}$ = amount of gas [illegible] $\frac{1\,\text{gm}}{22{\cdot}4\,\text{dm}^3}\;\frac{\text{at }0{\cdot}01\,\text{mm}}{760\,\text{mm}}\;\frac{[illegible]}{0^\circ} = 5{\cdot}5.10^{-10}$

$\therefore \varphi$ for oxygen = 120. 10^{-5}

for other gases $\sim$ mol. heat

$\varphi = \quad \sim \frac{1}{\sqrt{\text{mol. weight}}}$

A	Ne	N_2	O_2	CO	N_2O	C_2H_4	CO_2	CH_4	H_2	He
~~He~~										
1·20	1·70	2·05	2·23	2·38	2·75	3·82	2·54	[illegible]	[illegible]	8·95
K = 1·09	1·34	0·9[illegible]	0·86	0·82	0·77	0·72	[illegible]	0·68	0·61	[illegible]

[illegible] , [illegible] [illegible] gases [illegible] of energy [illegible] is perfect, but for [illegible] gases [illegible] , [illegible]

[illegible] not [illegible] different [illegible] of φ [illegible] that [illegible] the heat interchange between surface and mol. impinging [illegible] [illegible] by the single impact. [illegible] to be [illegible] of the [illegible] that the heat interchange is imperfect in the case of the majority of gases is well founded.

[illegible] He [illegible] $K\cdot\varphi$

Compressibility [illegible] < 1 [illegible]

20° [illegible] $5.0 \cdot 10^{-6}$ 17 [illegible]

[illegible] $146 \cdot 10^{-5}$

[illegible] 7.5 [illegible]

Cagliati & [illegible] [illegible] 19, 169 [illegible]

Compressibility 1–4 atm [illegible] $\mu_s = 0.0000871 + a(t-15.4) + b(t-15.4)^2$ [illegible]

$\log a = 388.7$ [illegible]

$\log b = 1.3$ [illegible] 47

[illegible]	15.4°	$0.0_4\,871$
	50.1	$0.0_3\,1110$
	78.8	$0.0_3\,1204$

[illegible]

[illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ $2 \cdot 10^{6}$ 730 [illegible]

$2 \cdot 10^{5}$ 17 [illegible] 14

[illegible] 10^{1} 4.3 [illegible]

$\therefore$ [illegible]

([illegible] ?)

Kam Onnes [illegible] 59, 193 (1896) p. 21

$$\frac{\eta\, V^{1/3}}{[illegible]} = K$$

V = [illegible]

[illegible]

T_c [illegible]

[illegible] Constant [illegible]

[illegible] Ph. [illegible] 190 p 72+ (1879) [illegible] 170 p [illegible]

[illegible] (1880)

[illegible] p 233

Δ_p [illegible]

$\frac{4}{\Delta_p} = \overline{T}(c)$ [illegible]

F [illegible]

[illegible] (ξ, ζ) [illegible]

[illegible]

[illegible]

$\Delta_p \sim \sqrt{c} \cdot M$

[illegible] Transport [illegible]

[illegible] [[illegible]] [illegible]

[illegible] 72

[illegible]

---

(4) [illegible] [illegible] p 305–320

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] p 58

16

Temp. coeff. ... 1855

557.08

β 312   K

0·00005

579 – 582   602 – 583

555 – 579   568

    560

    582

    595

$K_m = \dfrac{k_1 v_1 + k_2 v_2}{\ldots}$

$v_1 + v_2 = 1$

$\dfrac{1}{K_m} = \dfrac{v_1}{k_1} + \dfrac{v_2}{k_2}$

$K_2 = \dfrac{2\,k_1^2}{k_2}$

p. 38 130
[illegible]

Luft		533				
[illegible]	2	685	[illegible]	986	[illegible]	90
	[illegible]	452		907		739.5
	[illegible]	835		932		[illegible]
		0.0561				[illegible]

$k_n = k_1 + c$ [illegible]

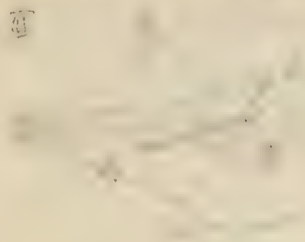
[illegible]

[illegible]

p. 38 [illegible] [illegible] 346

Luft	532
Kochsalz	582
[illegible]	[illegible]
[illegible]	592
[illegible]	469
	813
– [illegible]	[illegible]
– [illegible]	56
– [illegible]	
[illegible]	[illegible]
[illegible]	45+
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible] – 133

12



equally probable

Want the probable move — find number of pairs

$\xi' - \xi_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\Big[(\xi_2 - \xi_1) 2\sin^2\theta + \big[[illegible] + (\xi_2 - \xi_1)^2 \big]^{1/2} [illegible] \Big]$

[illegible]

[illegible] make angle [illegible] with [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible] 113 [illegible]

1115 [illegible]

$\frac{1}{J} = 0{,}04 \cdot 10^5$ [illegible] pour $\tau = 3{,}5$ sec.

$v = \frac{e}{6\pi \mu a} = 2{,}75 \cdot 10^{-2} \frac{cm}{sec}$ [illegible] [illegible]

$a = 4{,}7 \cdot 15^{-6}$ [illegible] $= \frac{RT}{N} \frac{t}{[illegible] \Delta^2}$

$e = 4{,}5 \cdot 10^{-10}$ [illegible] (charge unique)

[illegible]

[illegible] $5 \cdot 10^5$ [illegible]

[illegible] $D = [illegible]$ [illegible] $= 10^5$

[illegible]

(?? 3 [illegible]

[illegible] et [illegible] p. 1654 1), Les [illegible] [illegible]

2) [illegible] P_2O_5, NH_3, SO_3 etc

3) [illegible]

1598 [illegible] Les [illegible] pourront de course physique ([illegible])
[illegible] de liquide 18

s'il y a rupture de la surface d'un cristal [illegible] liquide
indépendamment de l'[illegible] chimique

[illegible]

Cunningham PRS 83 p 357

(Cloud of) Particles of mass M, N per unit volume, diffuse through gas with progressive velocity V_0. Required: mean force per particle to maintain velocity V_0.

collision if distance of centres $= a$; centre of molecule being within small area

$d\omega = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

Probability for molecule : $A \, e^{-hm(u^2+v^2+w^2)} \, du \, dv \, dw$ $\qquad A = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{hm}\right)^3}}$

for particle having veloc. V_0+U, V, W : ...

$$B \, e^{-hM(U^2+V^2+W^2)} \, dU \, dV \, dW$$

In order that collision may take place within these limits in interval δt, the centre of molec. must lie at beginning of δt within cylind. volume, base $d\omega$ and height: $\underbrace{(U+V_0\cos\theta-u)}\delta t$

with restriction that ——— >0 (if there are no velocities U, V or W!)

Magnitude of impulse $= J = \frac{2Mm}{M+m}\left[U+V_0\cos\theta-u\right]$

∴ total impulse in direction of V_0 per unit time:

$$\iiiint A \, e^{-h(u^2+v^2+w^2)} \, J \cos\theta \; n \, (U+V_0\cos\theta-u) \, d\omega \, du \, dv \, dw .$$

$$= \frac{A n \pi}{hm} \, 2\pi a^2 \, \frac{2Mm}{M+m} \iint e^{-hmu^2}\left[U+V_0\cos\theta-u\right]^2 \sin\theta\cos\theta \, du \, d\theta$$

Multiplying by probab. of vel. $(U V W)$ and integrating : the mean impulse per p. —

$$\left\{A(\;)\, n\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 4\pi \frac{a^2}{M+m}\right\} \iiint_{\theta=0}^{\pi} e^{-h(mu^2+MU^2)}\left[U+V_0\cos\theta-u\right]^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, du\, dU$$

K

U and u all values for which $u < U + V_0\cos\theta$

if V_0 small in comp. with mean velocity

$\alpha = U-u \qquad \beta = \dfrac{MU+mu}{M+m}$

$$K = \left[\frac{\pi}{h(M+m)}\right]^{1/2} \int_0^{\pi}\int_{-V_0\cos\theta}^{\infty} e^{-h\frac{mM\alpha^2}{M+m}}\left[\alpha+V_0\cos\theta\right]^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\alpha$$

$$\neq \ldots \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \qquad = \left[\frac{\pi}{h(M+m)}\right]^{1/2} \int_0^{\infty}\frac{4}{3}\alpha V_0 e^{-\frac{hmM\alpha^2}{M+m}}\, d\alpha = \frac{2}{3}V_0\sqrt{\frac{\pi(M+m)}{h^3 m^2 M^2}}$$

$\therefore$ mean impulse per unit time and particle : $= \dfrac{8}{3}a^2 V_0 n \sqrt{\dfrac{\pi Mm}{(M+m)^2}}$ (*)

represents rate of transfer of momentum from a particle to the surrounding gas by reason of collisions. In the case where the particles are few in number and of the same order of magnitude as ~~the~~ the molecules, the mass velocity will be slightly affected. But when drawn comparable with it impossible to neglect. Then substitute for V_0 the diff of mean velocity of particle V and of the mass velocity $K\bar{V}$ of the gas.

If mass velocity assumed to be $K\bar{V}$ rate of dissip. $= 0\pi n a K\bar{V}$ (a = effective radius) In the steady motion this just must balance the momentum communicated by the particle to the gas.

(*) This also obtained as a particular case of a general formula by Langevin Ann. Ch. Ph. 5, 1905, 266 and applied by him to the consideration of the mobility of ions

$\mathcal{M}$ 2 A, 563

Cunningham Pr. R. S. 83, p 357

19

force per unit particle required to maintain drift V_0 of the particle relative to the gas

$$= \frac{8}{3} \sigma^2 V_0 n \sqrt{\frac{\pi M m}{(M+m)^2}}$$

M = mass of particle

n = number of mols per unit vol.

This also as a particular case of Langevin

Ann de Ch et de Ph 5, (1905) p 266

which is applied by him to mobility of ions

mutual influence of cloud

$$X = 6\pi\mu a V\left(1 + \frac{9}{4}\frac{a}{b} + \frac{81}{16}\frac{a^2}{b^2} + \cdots\right)$$

b = radius of spheres surrounding packed in the closest manner possible

$$\frac{F}{V} = \frac{8}{3}\sigma^2 \sqrt{\pi}$$

$$1+\frac{p\pi\mu}{a\,4\,n\sqrt{\frac{\pi m}{h}}} = 1+\frac{1}{4a}\,\mu\sqrt{\pi m h}$$ 20

$$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi m}{h}}\;a^2 n\,(\bar{V}-k\bar{V}) = 6\pi n a k\bar{V}$$

$$\therefore\; k = \frac{4an\sqrt{\frac{\pi m}{h}}}{4an\sqrt{\cdots}+p\pi n} = \left[1+\frac{3}{4}\frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right]^{-1} \qquad \left(1+\frac{1}{4a}\frac{\mu}{c}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)^{-1}$$

$$= \quad \lambda = \frac{3\mu}{pc}$$

$$X = 6\pi n a k\bar{V} = 6\pi n a\bar{V}\left(1+1{\cdot}63\,\frac{\lambda}{a}\right)^{-1}$$

if fraction f elastic

$$X\left[1+\frac{1{\cdot}63\frac{\lambda}{a}}{f+2(1-f)}\right] = 6\pi\mu a\bar{V}$$

in Zeleny's exp Stokes Formula ~~gives~~ ~~velocity~~ 1·05 – 1·036 too small

Exp. at lower pressures should show greater deviations and may throw light on f

Mutual Influence of the Particles of a Cloud

Round each particle a sphere of radius b so that ~~they just enclose the~~

packed in the closest possible manner

Sphere at rest, in the middle the little spherical particle moving

$$X = 6\pi\mu a\bar{V}\left[1+\frac{9}{4}\frac{a}{b}+\frac{81}{16}\frac{a^2}{b^2}+\cdots\right] \qquad \text{but condition too rigid}$$

other value moving spheres so large that volume of fluid occupied by them b^3

This would imply for Townsend's experiments increase of e ~~about~~ by about 5½ – 7½ %

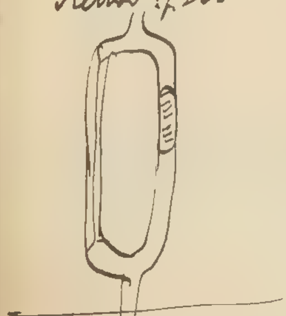
but first ~~corr~~ correction renders diminution of e by about 4%

Both causes correspond to increase by c. 2%.

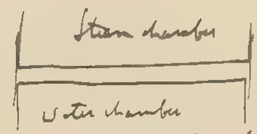
Rankine P. R.S. 83 p. 516

Viscosity of			λ	$\frac{\sigma}{2}$	λ/λ_{air}
	He	1.000	1	1.00	1.006
	Ne	1.585	0.704	1.19	1.721
	A	1.129	0.354	1.08	1.221
	Kr	1.254	0.274	1.91	1.361
	X	1.136	0.198	2.25	1.234

Method: p. 266



83. p. 19
Todd Thermal conductivity of air & other gases



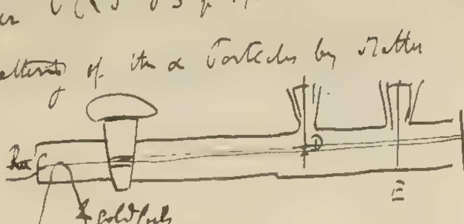
measured: heat carried by water ; radiation eliminated by variation of distance

very elaborate method Results:

Air	$k_{50} =$	0.0000571
CO_2		411
O_2		593
N_2		569
NO		539
NO_2		888

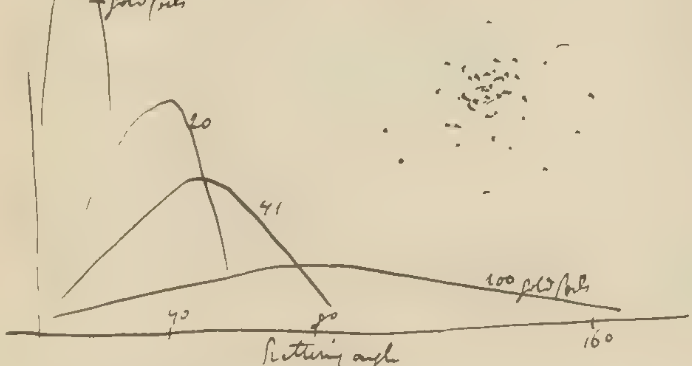
Geiger PRS 83 p 492

Scattering of the α Particles by Matter



← scintillations measured by microscope

by introducing foils in E area of flashes broadened



Most probable scattering angle	number of gold foils	equivalent to cm of air (stopping power)
10′	1	0·04
23	2	0·08
36	4	0·15
49	8	0·29
1°10′	12	0·46
1°40	20	0·76
2°20	30	1·14
3°0	41	1·53
3°40	56	2·12
3°55	60	2·25
3°25	15	1·62
4°15	20	2·16
5°20	25	2·64
6°20	30	3·20
7°[illegible]	35	3·68

(foils 1–60 thin; 15–35 thick)

Rayleigh Theory of Sound II ed. p 39 (1894)

One ought to expected the angle to increase $\propto \sqrt{x}$

this is shown for small thickness (up to 0·5 cm air) but for larger ones approx. $\sim x$

this probably due to decrease of V

atomic scattering angle ω (Au) $= \frac{1}{200}°$ | if we assume diameter of an atom 2.10^{-8} cm.

a thickness of $8\cdot 6.10^{-6}$ cm gold foil corresp. to: 100 atoms

		Atomic weight	Rel. atomic scattering angle K_0	$\frac{K_0}{\sqrt{A}}$	$\frac{K_0}{A}$ ρ	$\frac{K_0}{\rho}$
~~Gold~~	Au	197	1·00	0·51	19	0·05
Tin	Sn	119	0·56	0·47	7·3	0·08
	Ag	108	0·53	0·49	10·5	0·05
	Cu	64	0·30	0·47	8·9	0·03
	Al	27	0·106	0·39	2·6	0·04

Range after having passed through:

	↘	Velocity	Rel. scatt. coeff.t (φm in deg)	$K.V^3$
mica window alone	5·60 cm	0·92	0·15°	0·12
sheet of Al	4·00	82	0·18°	0·10
mica	3·40	78	0·18	0·08
Al	2·21	67	0·35	0·11
"	2·21	67	0·38	0·11
"	1·20	55	0·75	0·12
	0·89	48	1·37	0·14

$\therefore K \sim \frac{1}{V^3}$

Ionisation produced by α Particles II Geiger p. 535

I). Retardation of α particles passing through matter

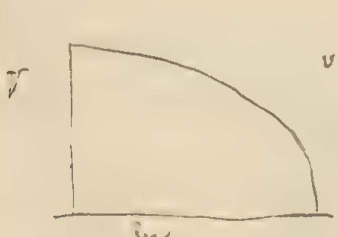
deflection by magnetic field of a pencil of α rays / produced by thin wire covered with active deposit of Ra emanation

observed: scintillation method

actual deflections of order 1cm for 20.000 Gauss

Thickness of interposed mica equivalent to cm of air:

	0·90	1·38	2·60	3·66	4·79	5·81	0·08	1·57	6·80
Rel. vel. (initial = 1)	0·953	896	818	767	684	551	45	35	27



$v^3 = a(R-x)$

$R = 7$ cm

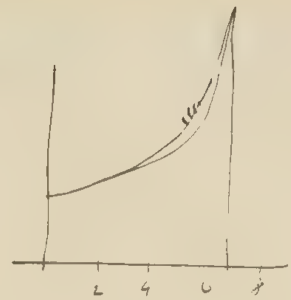
results in good accordance with Rutherford's old results Phil Mag 12 p. 138 (1906)

II). Initial Velocities of α particles equal within 0·5% but by passing through matter they acquire differences of velocity (diff of range of 5 mm)

II) Just natural ~~suppo~~ assumption that
Ionization ~ energy absorbed

$$I_o = b \frac{d(v^3)}{dx} = c\,(R-x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$v^{-3} = \frac{a'}{R-x}$$



This theoretical ionization curve, taking $R = 6.7$

$$\therefore \underline{I \times v = \text{const}}$$

This has been also arrived at by Bragg Phil Mag ~~...~~ 13 p. 390. 1907

Interesting paper ~~...~~ by T. S. Taylor Phil. Mag 18 p. 604, 1909

Russel Ph. M. 20, 591, 1911 The Convection of heat from a body cooled by a stream of fluid
Further extension of Boussinesq's Theory (neglection of viscosity!) and comparison with experiments.

Litteratur zu Wärmeleitung & Bekleidung

Winkelmann I p. 976 - 983 — Hohnel Mikroskopie d. Faserstoffe Wien Hartleben 1887

A Rubner Arch f. Hyg. 1892 Bd. 15 p 29
16 352, 109
17 1
1894 20 365
23 13
24 265, 346
25 1, 29. 70, ~~...~~ 252,

Lamb p. 555

Resistance of Ellipsoid in direction x $= 6\mu\pi U R$ if R taken to be:

$$R = \frac{8}{3}\,\frac{abc}{\chi_0 + \alpha_0 a^2} \qquad \chi_0 = abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

$$\alpha_0 = abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{}}$$

Suppose: $b = c > a$

$$R = \frac{8}{3}\,\frac{1}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{a^2+\lambda}} + \int_0^\infty \frac{a^2\,d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)}}$$

$$\int \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{a^2+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\pi - 2\arcsin\frac{a}{b}\right] \qquad b > a$$

$$R = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{b}\right]\frac{b^2-2a^2}{(b^2-a^2)^{3/2}} + \frac{a}{b^2-a^2}}$$

Suppose: $a = b > c$

$$R = \frac{8}{3}\,\frac{1}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}} + \int_0^\infty \frac{a^2\,d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{c^2+\lambda}}} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\frac{2a^2-c^2}{\sqrt{a^2-c^2}^{\,3}}\arccos\frac{c}{a} + \frac{c}{a^2-c^2}}$$

Seeliger Ann. 33 p. 319

Beitrag zur Th. d. El.-Leitung in dichten Gasen

Thomson's Gleichungen: $\frac{\partial E}{\partial x} = (n_1 - n_2)\, e$

$$i = e\, E\, (n_1 u_1 + n_2 u_2)$$

$$q = \alpha n_1 n_2 = \frac{\partial}{\partial x}(n_1 u_1 E) = -\frac{\partial}{\partial x}(n_2 u_2 E)$$

(ohne Berücks. d. Ionendiffusion)

sind mit grober Annäherung behandelt worden von J. J. Thomson El. d. – III

Riecke Gött. Nachr. 1903

Mie Ann 13 1904

wird hier qualitativ genauer analysiert (im Allg. ... Mie)

Cermak 33 p. 1195 Thomsoneffekt & Temp. Abh. in Pb ... ...

Kein Unstetigkeit beim Schmelzen

während E_b^e einen Sprung zeigt

Grüneisen 33 p. 1239 Einfl. d. Temp. auf d. Kompr. d. Metalle

Fe Cu Ag Pt Al Sn Pb bis $-190°$

Temp. Einfluss desto größer je größer therm. Ausdehnung

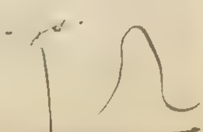
Pohl & Pringsheim Phil Mag. p 155

Normal & Selective Photoelectric Effect

pol. no infl. (for same energy of absorbed l.)
numb. of el. incr. with decr. wavelength
indep. of Temp.
same curve of initial velocity

only for pure alcali metals or Hg alloys of certain concentration
(superposed)
pol. of great effect
is only for E $\parallel$
not for E $\perp$

... pl.



Hertz   Crelle J f M. (92) (1881)

$$P = \frac{16\,\frac{r_1+r_2}{2 r_1 r_2}\,p^3}{3\left(\frac{m_1-1}{m_1 T_1} + \frac{m_2-1}{m_2 T_2}\right)}$$

m = Poisson'sche Zahl

T = Torsions Modul $= \frac{mE}{2(m+1)}$

p = Halbmesser d. [illegible]

$P = 1$

Rayleigh 4 p 396 Phil Mag 47 p 375 (1899)

$$h = 24\pi^3 n \frac{(n'^2-1)^2}{(n'^2+2)^2}\frac{T^2}{\lambda^4} = \frac{32\pi^3}{3n\lambda^4}(\mu-1)^2$$

$$= \frac{8\pi^3 n}{3}\left(\frac{D'-D}{D}\right)^2 \frac{T^2}{\lambda^4}$$

whether scattered in direction θ ... from one particle $\frac{D'-D}{D}\frac{\pi T}{r\lambda^2}\sin\theta \cos\frac{2\pi}{\lambda}(bt - r)$

whole emission of energy $\int 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta \ldots$

Rothmund Z Ph Chem 63 p 54 (1908)

p 76

[illegible] Domänen [illegible] Kleinig [illegible]

[illegible]

[illegible] Domänen [illegible]

Die Frage [illegible]

[illegible] Domänen [illegible] Dimension [illegible]

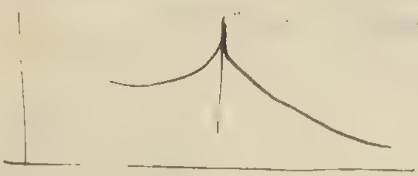
[illegible] Regnault's [illegible]

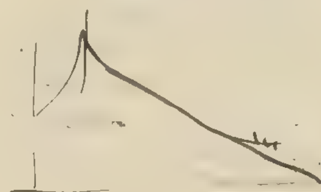
direkt [illegible]

[illegible] d. Donnan Hyp. [illegible]
[illegible] bestätigten Tatsache [illegible] gestreckten [illegible] Kämme.

absolut kT stabil. Trenng
instab. unstabil

[illegible] Argument [illegible] Ladungen [illegible]
[illegible] Fortschreitens [illegible] T. [illegible]





Breitenbach Ann. 67, 826 (1899)

+++ +++

6:

+++ ++−
++ + +−+
++ +− ++
++ − + ++
+− + + ++
−+ + +++

15:

++++−−
+++−+−
++−++−
+−+ ++−
−++++−
+++−−+
++−+−+
+−++−+
−++++−+
++−−++
+−+−++
−++−++
+−−+++
−+−+++
−−++++

$\frac{6!}{1.5!} = 6 \qquad \frac{6!}{2!4!} = \frac{5.6}{2} = 15$

$\frac{6!}{3!3!} = \frac{4.5.6}{6} = 20$ stimmt

20:

+++−−−
++−+−−
++−−+−
++− −−+
+−+ +−−
+−+−+−
+−+−−+
−++ +−−
−++ −+−
−++ −−+
+−− ++−
+−− +−+
+−− −++
−+− ++−
−+− +−+
−+− −++
−−+ ++−
−−+ +−+
−−+ −++
−−− +++

Allgemein $W = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{\frac{N-m}{2}!\,\frac{N+m}{2}!}$

übersch.: $(N-2n) = m$

$n = \frac{N-m}{2}$

$N\delta = m$

$N d\delta = dm$

$\sqrt{\frac{N}{2\pi}}\int e^{-\delta^2\frac{N}{2}}\,d\delta$

$\frac{1}{\sqrt{2N\pi}}\int e^{-\frac{m^2}{2N}}\,dm$

W.W. Coblentz A comparison of stellar radiometers & radiometric measurement on 110 stars

Bull Bureau of Standards, Washington, 11, № 4 p 613 (1915)

Thermocouples Bi — Bi + Sn (5%)

in vacuo; vacuum maintained by calcium tube (quartz tube, sealed on, when heated to dull red heat, absorbs all traces of gases)

~~stop~~ measurements down to 6.6 magnitude.

Sensitivity (with mirror) such that candle in 53 miles distance would cause of 1 mm

Total amount of stellar radiation ~~W~~ on 1 cm² would require 100 - 200 years for ~~raising~~ ~~temp of~~ glowing 1 cal.

H.L. Curtis Insulating properties of solid dielectrics ibidem. № 3 p ~~[illegible]~~ 359

H. Nordenson (Upsala) Ü. d. elektr. Leitfähigkeit von Kolloid-[illegible] Koll. Z. 16, 65, 1915

Stokes: $u_i = \frac{H e_i}{6\pi\eta r_i}$ dieselbe Größe auch für Ionen wie Kataphorese

also $\frac{e_K}{r_K} = \frac{e_i}{r_i}$ = konst

$$\frac{l_K(\text{koll.})}{l_i(\text{Ionen})} = \frac{n_K e_K}{n_i e_i}$$

falls dieselbe Substanzmenge $\frac{n_K}{n_i} = \frac{r_i^3}{r_K^3}$

$$\therefore \frac{l_K}{l_i} = \left(\frac{r_i}{r_K}\right)^2$$

Kritik u. Messungen von: A. Scala, Traube-Mengarini; Duclaux v. Koll. Metalle

Die Leitfähigkeit ~~[illegible]~~ kann nur von Elektrolyten (und [illegible] Ionen?) herrühren

Dagegen bei hoher Konzentration und hohem Dispersitätsgrad könnte Eigen Leitfähigkeit merkbar werden [Duclaux, J. ch. ph. 7, 405 1909]

Für Koll. Ag Lösung

Teilchen radius 25 µµ

Silberionen radius 0.25 µµ

$l_K = \frac{l_i}{10^4} = 55 \cdot c \cdot 10^{-3}$ (Normalität)

c für Koll. Ag Lösung höchstens 1 millimol

$\therefore K_K = 3 \cdot 7 \cdot 10^{-8}$

also unmerkbar klein

$Fe(OH)_3$	$c\% = 1.74$ / 0.80	$K = 1485 \cdot 10^{-6}$ / 592.	Teilchen Radius 1.85 µµ
Molybdänblau	10.30	406.0	5.20
ThO_4	6.50	2418.0	0.65

$K_K = (314 + 55) \cdot 10^{-7} \cdot c$

pro H Ionen

O. Hauser A. Lewite   quantit. Deutung von Fällungswerten beitragend   Kolloid Z. 16, 33, 1915

H. Freundlich   Bemerkung dazu   ibidem p. 36

Versetzt man rasch mit Elektrolyt in wechselnder Konzentration bis Fällung erfolgen eintritt. Dann Fällungskonzentr. ist bei starker Konz. bestimmt dagegen in verdünnter ~~[illegible]~~ Lösung muss mehr Elektrolyt zugesetzt werden. Unterhalb gewisser Konz. tritt Fällung überhaupt nicht ein.
„Fällungswert" ist dann Bereich der Konstanz. —

Freundlich weist auf Ishizaka Z phys Ch 83, 97 (1913), Koll. 12, 230, (1913)

Paine   Koll. chem. Beih. 4, 24, (1912)

und im Zug befindl. eigene Arbeit mit J. Gann   kritisiert obigen Ausführungen, (mit Recht): das eigentlich bestimmende wäre Messung der Koag.-Geschwindigkeit

wobei Koagulation durch die restliche Zunahme der Viskosität gemessen wird.

Größe d. Wertigkeit   100 Millimol NH_4Cl

und Unterschied d. anorg. & organ. Ionen   0·09 „ $Fe(CN_6)K_4$ 14 „ K benzoat   } gleich wirksam auf ~~[illegible]~~ $Al(OH)_3$ sol.

F. Powis   Pot. Diff. an Öl-Wasser Gr.   Z phys Ch. 89, 91, 1914
179, 186

F. Kirchhof   Einfl. d. Lösungsmittel auf Visk. v. Kautschuklösungen.   Koll Z. 15, 30, 1914

Umständliches, ~~[illegible]~~ p. 32: [illegible]   Unsinn!

W. Reinders   Verteilung e. susp. Pulvers oder eines koll. gel. Stoffes zw. zwei Lösungsmitteln

Koll Z. 13, 235, 1913 (auch p. 96)

Sehr häufig Ausscheidung an d. Grenze   z. B. Kongorot, Methylblau, Erythrosin etc. mit CCl_4

E. Hatschek   Visk. d. Emulsoid Sol. und Abh. von der Schergeschwindigkeit   Koll. Z. 13, 88, 1913

bei Stärke, Gelatine etc. verminderte sich Visk. mit Zunahme d.

Dumansky Oberfläche aus Kontakt CR 156, 983, 1035

Bonn Üb. d. Sedimentation Koll Z. 9, 14, 1911

Tripel, Bolus Repeat alter Versuche (1886–1888)

vgl. Sedimentationsgeschw.

Tripel	H_2O												
	min	NaCl 0·05%	0·1	0·2	0·4	0·8	KJ 0·01	NaCl 0·01	$CuSO_4$ 0·01	H_2SO_4 0·01	HCl 0·01	KJ 0·05	NaCl 0·05
$v \cdot 10^6 =$	9	30	45	54	110	150	9	9	30	300	1550	1·5	1·5

Äther	Alk.	H_2O	Glycerin	Methylalk.	Alk
v = 7500	1300	3	0·1	2000	1200

Reyher Elektrophoretische Beobachtungen 9, 16, 1911

M. Bancelin Üb. d. Visk. v. Susp. u. d. Bestimmung d. Avogadro'schen Zahl Koll Z. 9, 154, 1911

20 cm³ Gummigutt susp. in Wasser Ausfluss zeit ca 8 Min.

Radius = 0·3, 1, 2, 4 μ kein Einfluss

vgl. R = 0·3 μ (+20°C)
Dichte d. Gummigutt volumens

0	μ = 0·01016
0·09	1018
0·24	1023
0·33	1025
0·53	1029
0·66	1033
1·05	1044
2·11	1074

$\mu' = \mu(1 + 2{\cdot}9\,\gamma)$

auch Extrapol. auf andere Lösungen. $\mu' = \mu(1 + A\gamma)$

$A = 2{\cdot}6 - 3$

dagegen Lebensdauer v. Phenol u. Harnstoff Lösungen sehr geringe Viskosität

M. Pappadà Üb. d. Elektrisierung d. colloid. Teilchen Koll Z. 10, 242, 1912

Woudstra Z. ph. Ch. 63, 5, 1908

Innere Reib. von Ag hydrosolen nimmt ab mit Zeit und mit Zusatz von Elektrolyten (!?) !!

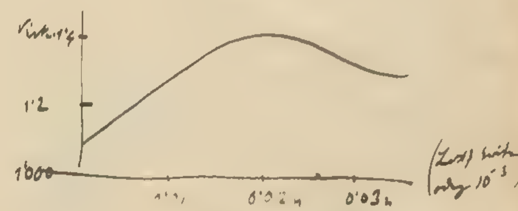
dagegen zu mit Konzentration

Wo. Pauli

Viskosität u. Elektrochemie d. Eiweisslösungen   Koll. Z. 11, 222, 191
unter Andrem:

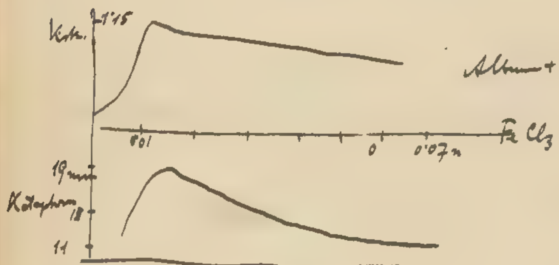
p. 223 : Pauli's Resultate Abnahme d. Visk. genau im isoelektr. Punkt

bei Säurezusatz gewaltige Erhöhung d. Visk. bei kleinem und im Überschuss d. Säure wieder Abnahme



p. 227 Eiweiss: Schwermetallsalze geben mit Eiweiss Komplexsalze

auch hier Maximum d. Visk. welch. d. Maximum d. elektr. Überführbarkeit entspricht und d. elektr. Leitfähigkeit



Visk. erklärt alles durch Änderung der Hydratation

Hämoglobin Hb 2'3 pp Eiweiss

Neutralsalze bewirken Abfall d. Visk. u. Koagulierbarkeit äusserst empfindlich (schon $\frac{1}{10000}$ merklich)

Gokun Beeinfl. d. Visk. d. Kolloide durch Elektrolyte Koll. Z. 3, 84, 1908

Tokar, Hen etc. Einfluss d. Zeit!

Rankine Abnahme d. Torsionskraft in Gelatinelösungen ~~Koll. Z. 3, 180, 1908~~
Phil. Mag. 64, 1906

elastisch sich
Temp. d. El. Grenze konstante

Malkolm Doppelbrechung in Koll. (Gelatine) hervorgerufen durch elektr. Endosmose Phil. Mag. 7, 2, 1906

Woudstra Üb. d. innere Reibung kolloidaler Silberlösungen Z. ph. Ch. 63, 5, 1908

Nimmt ab mit d. Zeit, ebenfalls bei Elektrolytzusatz; } beide rufen bekanntlich allmählig Koagulation hervor
" zu mit Konzentration

nach Ostwald's Methode hergestellt

Woudstra HW Koagulation von Ag Lösungen durch Elektrolyte: Z ph Ch 61, 5, 1908

Farrow FD Ü. d. Viskos. wässriger Natriumpalmitatlösung u. d. Einfluss v. Elektrolyten auf dieselbe J Chem S. 101, 347–357, 1912, Koll Z. 11, 305,

Alkalisalze d. höheren Fettsäuren sind Koll. (ausser in allergrößter Verdünnung)

bei Zusatz von Elektrolyten zunächst Abnahme d. Visk. bis Minim., dann rapider Anstieg

dagegen Zunahme bei wachsender Konzentration

Rosenberg H. Beiträge zum Hydratproblem Z ph Ch. 89, 467, 529, 1915 Koll. Z. 16, 172, 1915
(Bindung d. Wasserhüllen)

Oettel u Toporoff Elektrolytische Vorgänge an Diaphragmen Z ph Ch. 89, 597, 689, 1915

Hauser Fr. Abhängigkeit d. Durchschlagsfestigkeit fester disperser Systeme von d. Temperatur
Koll. Z. 13, 148, 1913 (Dissert. Erlangen 1912)

für Wachs, Schellack und Harzgummi: Abnehmend mit Temp.

Kolophonium nimmt zu bis 30°, dann Abnahme

Temp. bei der sich d. Wachstum d. Ausdehnungskoeff plötzlich verlangsamt.

Schmidt Frank J. (Inaug. Diss. Erl. 1911 u. Koll Beih. 4, 205, 1913)

S. Schiavelli Die elektr. Ausbildung d. Seide Koll Z. 13, 194, 1913

Sehr interessant, auch Durchschlagsstärke von Stoff

McBain, W James u Taylor, Konstitution v. Seifenlösungen Z ph Ch. 76, 179, 1911 Koll. Z. 13, 72, 1913

Leitfähigkeitsmessungen an Natriumpalmitat 0·01–2 n (Palmitinsäure)

beweist, dass solche Lösungen Gemische sind v. Kolloiden sauren Natriumpalmitat und Natronlauge

W.A. Patrick Oberflächenspannung u. Adsorption Z ph Ch. 86, 545, 1914

Gibbs' Gleichung ~~ist~~ kontrolliert, qualitativ aber nicht quantitativ richtig !

Fabricken Koll Z. 1908 ?

C. Doelter Ü. d. Umwandlung amorpher Körper in krystallinische Koll Z. 7, 29, 86, 1910
(Siehe auch Zsigmondy Koll. Chemie p. 131)

Duclaux Koll. betrachtet als Elektrolyte Koll Z. 7, 73, 1910

Zsigmondy Koll Chem zusammenfassende Zusammenstellung:

p. 241 Neutrales Eiweiss mit Säure versetzt wird positiv elektr. (Kataphorese)
(weitgehend gereinigtes) Alkali negativ

W B Hardy 1900 W Pauli 1906

Innere Reibung steigt bei geringem Säurezusatz sehr stark $\frac{n}{100}$ HCl bewirkt 1068 – 1209

Pauli erklärt dies durch verstärkte Hydratation d. Eiweiss ... als Folge ihrer Ionisierung

(Fällbarkeit durch Alkohol geht verloren durch ...

...

Ähnlich wie Säureüberschuss wirken zugefügte Neutralsalze (NaCl, $NaNO_3$ etc.)

...

p. 243 Die elektr. geladenen Eiweissteilchen sind als Hauptträger d. inneren Reibung d. Eiweiss-Lösungen anzusehen (Zagnare u. Sackur, Hardy, Pauli u. A.)

Rehbitz J. Ultramikroskop. Beobachtungen Inaug. Diss. Erlangen 1908 Parallele fällt kolloid. ($\frac{A_g}{Cl^{u}}$)

Koll Z. 5 266, 1909
Erst in verdünnten Lösungen werden alle Teilchen sichtbar

Beobachtet Teilchenzahl prop. Beleuchtungsintensität II HCl bewirkt Koagulation, Zit-Rahm)

Maximum d. Stabilität im isoelektr. Punkt, dagegen Minimum isogenen Punkt sowohl für + wie – Ladung

im Widerspruch zu Hardy aber ... Diller

Dabei ist freie H Ionen in der Lösung im isoelektr. Punkt

Koll. Lösungen stabiler bei grossen Verdünnung

Auch HCl trotz vorhandener Konz. aber gleichem Gehalt übt verschied. Wirkung aus

N. Pappadà (Zsigmondy Koll. Chemie) p. 177:

1910 Fällende Wirkung von Elektrolyten unabhängig vom Anion

aber abh. vom Atomgewicht d. Kations:

am wenigsten bei Na K Rb Cs am stärksten

Traube Ph. Ch. p. 57
Atomvolumina der Elemente

Li	Na	K	Rb	Cs		Mg	Zn	Pb	Hg	Al		
11.8	23.7	45.7	56.2	70.7		13.8	17.2	18.2	14.8	10.2		
Ca	Sr	Ba				Ag	Au	Pt	Ni	Cu	Fe	Cr
25.4	34.5	36.5				10.2	10.2	9.1	7.1	6.8	7.1	7.8
Cl	Br	J										
25.0	25.6	25.6										

p. 120 in Verbindungen: C ... 9.85 Hydroxylsauerstoff 0.4 – 2.3
H 3.05 Carbonylsauerstoff 5.5

W. Voigt (Wied.) Ann. 19, 39, 1883 Scheinbare Adhäsion von Glasplatten

(Winkelm. I p. 885) Art der Luftschichten, welche an festen Körpern kondensiert sind.

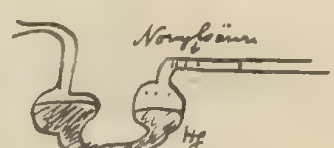
J. Meyer Schmelzpunkt d. CCl_4 Z. ph. Ch. 90, 721, 1915

Starke Einflüsse absorbierter Luft von 5.46° bis 5.32°

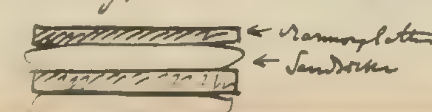
Drucker, Jimeno, Kangro, Dampfdrucke flüssiger Stoffe bei niedr. Temp. Ibid. p. 513

Hexan, Alk. etc. etc. bis − 100°

Verwend. von Hagens Manometer mit breiten Stellflächen
Empfindlichkeit 0.001 mm Hg.



erschütterungsfreie Aufstellung:



HW

Woudstra Koll. Z. 8, 73, 1910. Dispersitätsgrad u. innere Reib.

Vereinigung d. Verfahren: 1). Elektrolytzusatz

2). Erhitzen

3). " mit Elektrolyt

4). Schütteln → „zu unbedeutend um irgend welche Schlussfolgerung" ! (sogar nach Verfassers Aussage)

(171.2 → 171.05)

I). wd. Fe_2O_3-Sol

Zusatz von 0.06 millimol KCl auf 26 cm³ ...... t/p 168.8 → 165.8

39
35.5
0.0745 g
0.00447 g : 26 = 0.00017 g/cm³
= 0.017 %

$c = 0.069 \cdot \frac{0.017}{5}$ $\quad \frac{207}{276}$

$= 0.000235$

bei 100 μμ ? = 10^{-5}

II). Millimol pro 11 cm³ KCl

Millimol pro 11 cm³	t
—	177.5
0.0025	174.0
0.0050	172.4
0.0075	173.2
0.0100	175.5

III). K_2SO_4 auf 26 cm³

—	171.5
0.009	169.6
0.025	175.9

neutrales K.oxalat

$7.5 \cdot 10^{-5}$/11 cm³	~ 177.8 / 176.3
1250	1904

also bei sehr geringen Zusätze abgeschwächte ~~Wirkung~~

bei stärkeren Zusatz Zunahme (dabei Trübung)

Erwärmung durch mehrere Tage (12) in Jenaer Röhren auf 45° 168.6 → 166.4

Inzwischen mit Tag ... nicht durch die Vereinigung d. Dispersität ... geprüft experimentell

Sven Odén Koll. Z. 9, 100, 1911 (Sehr wichtig)

Die Änderung d. Dispersitätsgrades ... Schwefel-hydrosole

Für gleichkörnige": I) bei konst. Salzkonzentration nehmen t_0 und k ab wenn Dispersion wächst; t_0 bedeutend schneller als k

II) " " Dispersitätsgrad ist konst. Konst. dagegen t_0 abnimmt mit Konz. d. HCl (etwas abnehmend)

III) Zusatz von Säuren in gering. Konz. verursachen Abnahme von t_0, während k unverändert

Sandbergs Sorte, reversible Hydrosole: [illegible]

Konz. of S [x Koagulum] bei Gegenwart d. Koagulators

$$S = e^{k(t-t_0)}$$

Teilchen diam. cca. 265 μμ

HCl 0'101 normal

t °C	S pro 100 cm³ Sol
17'5	22'23
17	14'00
14'9	7'53
11'5	0'05
10	0'01

t_0 wächst rasch mit Zunahme d. Koagulators

k nimmt wenig ab " " " "

vollkommen Reversibilität

(für gleichkörnige wird bei ... S ...)

Koagulum proportional Salzmenge gebunden und zwar um so mehr je größer Dispersitätsgrad

J = pro 1 g S ... HCl-Menge = 0'02781

Sven Odén Koll. Z. 10, 119, 1912 Siehe Z. phys. Ch. 78, 682 1912; Z. Koll. 8, 186, 1911

Stabilität u. Dispersitätsgrad

Teilchendiameter d. (S hydrosol) S Konzentration 0'5%

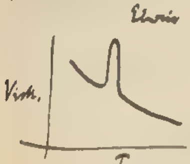
				25	90	140	210 μμ
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Schwellenwert in Mol pro Liter HCl	4,80	3,75	3'40	1'85	1'00	0'65	0'50
NH_4NO_3	1,02	0,75	0,67	0,46	0,32	0,25	
NaCl	0,30	0,24	0,20	0,15	0,11	0,09	0,07
KCl	0,034	0,029	0'025	0'025	0'020	0'020	
$Ba(NO_3)_2$	0,0017	0,0014	0,0012	0,0012	0,0010	0,0010	

Sven Odén Z. ph. Ch. 82, 80, 1912 Zur Kenntnis d. reversiblen Koagulationsprozesses

... und S Koagul., ... d. Teilchen, falls ... nicht allzu ... Koagulator

Wo. Ostwald Über die Viskosität, e. Studium d. koll. Zustands Koll. Z. 12, 213, 1913

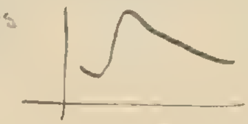
Viel wüstes Gerede! Verf. betont Analyse d. Viskositätsänderg. z. Eiweiss bei Erhitzen



u. Verkleisterung v. Stärke,

d. Visk.-anomalien kritischen Lösungen, d. kristallinen Flüssigkeiten

und d. Schwefels



D. Iljin Die Viskositätsänderg. d. Teilchen bei d. [illegible] Z. phys. Ch. 87, 366, 1914

Einige Belegzahlen f. d. exper. Ersatz der Gummigutt, Richtmaße Summe oder + H_2O

ohne Gründe angeben!

K. Jablczynski Bildungsgeschw. d. Niederschläge Z. phys. Ch. 82, 115, 1913

Dispersion u. [illegible] [illegible]

A. Findlay Dasselbe Reaktionen [illegible]

Z. phys. Ch. 34, 428, 1900

Sven Odén Z. phys. Ch. 80, 709, 1912 Ph. chem. Eigensch. d. Schwefelhydrosole

Dichte: $K = \frac{d_{sol} - d_{disp}}{A}$ ← Schwefelgehalt in Gramm in 100 cm³

A:	45.00	18.98	6.40	3.20	1.07	0.53	} amikroskop.
$K.10^3$	4.81	4.87	5.06	5.19	5.51	5.85	

A:	10.65	8.00	3.00	1.00	} submikrosk.
$K.10^3$:	4.72	4.81	5.00	5.30	

Spez. Gew. d. unterkühlten flüssigen Schwefels ist nicht genau bekannt, schwankt 2.03 − 1.90 (bei 16°)

was auch den [illegible] für Kristallisation

also größere Dichte bei kleinem Gehalt u. ~~kleiner~~ höherer Dispersion !?

therm. Ausdehnung weiter abnormal als

Viskosität:

Korrigierung d. unmittelbar beob. Werte (mit NaCl Gehalt) auf reines Wasser 25 [illegible]

abs. kolossale Vergrößerung bei Koagulation

$\frac{1}{\eta} = Kt + C$

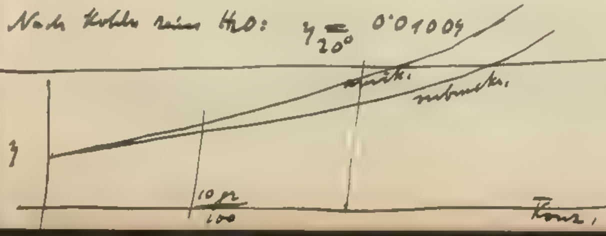
amikrosk. Sol.

gr S pro 100 cm³ Sol	K	C
48.28	0.42	11
30.72	0.87	23
24.14	1.05	29
15.36	1.44	38
7.68	1.73	46
3.84	1.95	52
1.28	2.15	54
0	2.20	56

amikr. $\frac{5\,g}{100\,cm^3}$ S ; $\frac{0.43}{100}$ NaCl — amikr. Teilchen ~~[illegible]~~ 0.20 – 0.25 (diam. ca 10 μμ)

20°	η = 0.01129	η korr. = 0.01126	*	
"	0.01091	0.01088	"	0.20 – 0.16
"	0.01086	0.01083	Submikr.	0.15 – 0.12 (Teilchendiameter ca 100 μμ)
20°	0.03708	0.03702	" "	Gehalt $\frac{55.03}{100}$ 0.76
	0.01717	0.01714	" "	25.02, 0.38
	0.01281	0.01279	" "	12.51, 0.19

Nach Kohler reines H_2O: $\eta_{20°} = 0.01004$



also konk. Abhängigk., kein Übereinst. mit Formel

Einfl. d. Dispersitätsgrads ($t = 20°$)

Fraktion	Schütt S	Na Cl	η	η korr.
> 0.25	5	0.43	0.01129	0.01126
0.25 – 0.20	50	—	—	0.05750
"	5	0.70	0.01109	0.01103
0.20 – 0.16	5	0.43	0.01091	0.01088
0.15 – 0.12	5	0.43	0.01086	0.01083
"	50.03	0.76	0.03708	0.03702

also großer Einfl. d. Dispersitätsgrads bei starker Konzentr.

Abnorme Steigerung bei Koagulation. → [illegible] Falsch!

Oberflächenspannung unverändert bis $\frac{45}{100}$ Schütt?

Änderung in der [illegible] (unverkürzt): $\frac{\text{NaCl} - \text{[illegible]}}{\text{Schwefelgehalt}}$ = 730

R. O. Herzog Bemerkung ü. d. Visk. kolloider Lösungen Koll Z. 8, 210, 1911

möglicherweise Einfluss d. „Menge d. an die Teilchen gebundenen Dispersionsmittels"

Abnahme d. Visk. eines Suspensoidkolloids:

As_2S_3 (H. Meier) von 43'9" bis 41'29" in 25 Tagen, wobei Dichte von 1.0069 – 1.0011 abnahm. (was soll das bedeuten ?)

„kann indirekt verursacht sein, dadurch d. Veränderung d. „Teilchengröße", durch Ausscheidung d. Disp. Mittels etc.

H. Freundlich u. N. Ishizaka D. Koagul. v. $Al(OH)_3$ Solen [illegible] Koll Z. 12, 230 1913

m	$\Delta\eta$ (sek)	$\frac{\Delta\eta}{m}$
0.187	8	42.9
0.28	12	42.9
0.48	21.2	44.2
1.12	55.6	50

gr Al_2O_3 pro Liter

[illegible] Suspension von $Al(OH)_3$ Viskosität bei gänzlicher Fällung

Es zeigten sich aber jene Werte abhängig von Art d. Elektrolyten, [illegible]

m. KNO_3 $\Delta_{700} = 74$ $\Delta_{700} = 22\cdot 0$
$K_3Fe(CN)_6$ 104 $52\cdot 0$ }! [illegible]
[illegible]

[illegible] Flocken [illegible]

[illegible] : [illegible] Schütteln!
beikonzentrierten

E. Hatschek Allg. Theorie d. Visk. [illegible] zweiphasigen Systeme Koll. Z. 12, 238, 1913

D. Visk. d. Dispersoide Koll. Z. 7, 301, 1910

$\eta' = \eta\,(1 + 4{,}5\, f)$

" 8, 34, 1910

$\eta' = \eta \dfrac{\sqrt[3]{f}}{\sqrt[3]{f} - 1}$ $f = \dfrac{\text{Gesamtvol.}}{\text{Volum d. disp. Phase}} = \dfrac{1}{\varphi}$ eventuell Einfluss d. Scherungsgeschwindigkeit

$\dfrac{\eta}{1 - \sqrt[3]{\varphi}}$

Koll. Z. 11, 280, 1912 Deutung d. Adsorptionshülle aus Sven Odén's Messung zu $0{\cdot}87\,\mu\mu$

[illegible] 74·04 %

$\therefore \quad A = \left(\dfrac{\eta}{\eta - 1}\right)^3$

Rifka Ü. d. innere Reibung koll. Metalllösungen Wien. Ber. 120, 1172, 1911

Famet Z. phys. Ch. [illegible] 1912

Hess W. ([illegible] p. 91) $\eta' = \dfrac{\eta}{1 - \varphi}$

R.O. Herzog & A. Polotzky Z. ph. Ch. 87, 449, 1914 D. Diff. einiger Farbstoffe

D. Zavrieff Notiz [illegible] Koll. [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] Metallen [illegible] Zerstäubung ibid. 507
Holtz'sche Influenzmaschine (und für Jenes Funkenstrecke) äusserst bequem

1913
12, 230
0011

F. Eckert & R. Pummerer Photogr. Spektralphotometrie d. Absorptionsspektra v. Farbstoffen

Zphys Ch 87, 599, 1914

(Weber, rotierender Sektor, daß dann Σt für photogr. Wirkung maßgebend, innerhalb gewisser Grenzen)

F A Schulze [illegible]

Zphys Ch 88, 490, 1914.

Crowther gegen D Tyrer Zphys Ch 87, 169, 1914: $M(c_p - c_v) = 10$ Kal.

für eine große Anzahl v. Flüssigkeiten

und theoret. [illegible]

K. K. Järvinen [illegible] Molekular-Attraktion 88, 428, 1914 Siehe 82, 541, 1913

$$F = \frac{m^2 k}{r^n}$$

für Atomzentren n ungefähr = 6

für Molekularattraktion $F = \frac{m^2 k}{(r - b r_0)^5}$ daraus folgt $\frac{C_a}{W_i \; \alpha}$ = [illegible] = konst = 129 } [illegible] 163 } [illegible]

$\uparrow$ innere [illegible] Volumkoeff

für viele (organ.) [illegible]

$k s =$ konst

[illegible] ∴ [illegible] Volum [illegible] (?)

W J Jones & J R Partington Übersättigungstheorie Zphys Ch 88, 291, 1914 (Sehr wichtig!)

S. auch Jones Zphys 82, 448, 1912, Ann Phys 41, 441, 1913.

R [illegible] Verhältnis v. Atomvolum Zphys 88, 632, 1914

$$\sigma = k n \, (T_s - T)$$

[illegible] reziprokes Atomvolum Schmelztemp.

H. Remy Beiträge zum Hydratproblem II Z. Ph. Ch. 89, 529, 1915

Annahme d. Hydrat-Absorptionshüllen bei [illegible] Elektrolyse einen der Elektrosmose analogen Effekt ergeben und (hypothetische) Erklärung d. Überführung durch Solvation in [illegible]

Übersicht mit früheren Arbeit. Viel Bemerkungen ü. Elektrosmose

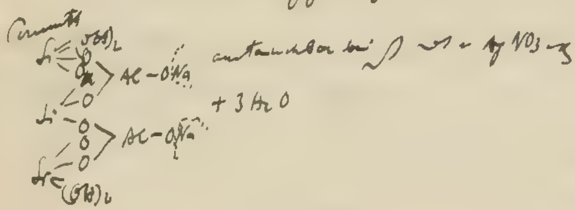
[entscheidend oder einfach durch inverses Phänomen : elektromot. Ströme!]

R. [illegible] Eigenschaften d. Kolloide III Koagulation durch [illegible] Lösungen ebenda 129

G. Schulze Ionendiffusion in Permutit u. Natrolith, ebenda 168

Na austauschbar gegen Ag Diff. const $1{\cdot}3 - 1{\cdot}9 \cdot 10^{-8}$ in Permutit

$1{\cdot}58 \cdot 10^{-10}$ in Natrolith



[illegible] ebenda 179

[illegible]

[illegible] Koagul. Koll. Lsg. 180

[illegible] Koagul. [illegible] (0·030 V) [illegible]

Konz. nötig für [illegible] 0·030 Volt:		Konz. für Null:
KCl	51 – 156	5000
$BaCl_2$	19 – 0·85	95
$AlCl_3$	0·020 – 0·0058	0·57
$ThCl_4$	0·007 – 0·0041	0·0156

Koagul = [illegible]!

Rayleigh Mikromanometer beschrieben: ebenda p. 157 auch Z. ph. Ch. 37, 713, 1911

Empfindlichkeitsgrenze 0·00058 mm

Boselli J. Der Widerstand bei d. Bewegg kleiner nicht kugelförmiger Körper in e. Flüssigkeit

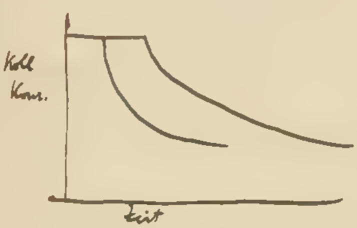
CR 152, 133, 1911, Ref. Koll Z. 11, 90, 1912

(rote Blutkörperchen, unbelad. Theorie)

H. H. Paine Die Koagul. Geschw. von kolloidem Kupfer Koll Z. 11, 115, 1912

Cu-hydrosol (el. Bredig) Leitfähigkeit $1-3.10^{-6}$

* Koagulation infolge Na_2SO_4 od KCl; von Zeit zu Zeit Absetzen d. Koagulums entweder durch Erhitzen bis 100°C oder durch Umrühren Schütteln, was ein rasches Zusammenballen d. gefällten Flocken und Absetzen bewirkt. Dann Titrieren mit verd. $AgNO_3$ bis Färbung (gelb braun) verschwindet, was der Auflösung d. Cu entspricht



1). Es besteht eine Anfangsperiode „Inkubationszeit" während welcher die Lösg klar bleibt u. keine Fällung eintritt; offenb. ist Zeit erforderlich bis die Anlagerung so weit vorgeschritten, dass Fällung erfolgt (Sehr wichtig)

2). Bei verschied. Konz. d. Kolloids waren Zeiten, die einen gleichen Bruchteil d. anfänglichen Teilchen ausfällen, prop $\frac{1}{\text{Anfangs Konz.}}$; nachdem die Menge d. Niederschl $\sim$ Konz, also ist Koll. Geschwindigkeit $\sim$ (Anf Konz.)^2 was mit Massenwirkungsgesetz übereinstimmt (?) und beweist dass nur gegenseitige Anlagerung (nicht Kondens. an Kernen!) in Frage kommt.

3). Bei verschied. Beträge d. Elektrolyten ist Koagul. geschw. $\sim$ [Anionen konzentr. in d. Lösung]$^{5 \text{ bis } 6}$

Dies innerhalb sehr weiter Grenzen (2 Min. — 4 Tage) gültig

Kein Anzeichen für d. Einfluss d. isoelektr. Punktes. Kein Anzeichen für Adsorption einer zur Koagul. erforderlichen Menge.

Sondern Kurven ganz stetig und ähnlich nur Zeitmassstab verschieden.

Freundlichs Adsorptionstheorie nicht widerlegt, weil Koagul. nicht merklich abhängt von Weise wie Elektrolyt zugefügt wird.

Aber vielleicht schwankt die Anzahl d. adsorbierten Ionen und dementsprechend Pot. Diff. bewirkt Koagulat.

A. Ruffo u. G. Rossi Der Einfl. d. kolloid. Schwefels auf d. elektr. Leitfähigkeit einiger Elektrolyte

Koll. Z. 11, 121, 1912. (Weiter: 13, 289, 1913!

Nach Methode von A. Ruffo hergestellte S-Sole, enthalten etwas H_2SO_4, Na_2SO_4

Gehalt daran lässt sich bestimmen, wenn S infolge Aussetzens ans Sonnenlicht rasch

koaguliert (!!). Es zeigt sich dass Leitfähigkeit nach Fällung d. S viel grösser war als im

koll. Zustand! Bei anderen zugesetzten Salzen bald grösser, bald kleiner

F. Powis Der Einfluss d. Zeit auf d. Pot. diff. an der Oberfl. von in wässrigen Lösungen suspendierten

Öltröpfchen Zphch 89, 179, 1914 [Koll Z. 16, 175)

ändert sich rasch bis Wert welcher von Konz. d. Elektrolyt abhängt dann langsam bis Gleichgewicht

aber letzteres nicht Fortsetzung d. anfängl. Änderung

F. Powis Die Beziehung zw. d. Beständigkeit einer Ölemulsion u. d. Pot. diff. an d. Öl-Wasser

Grenzfläche u. d. Koagulation kolloidaler Suspensionen Zphch 89, 186, 1914 (KZ 16, 175)

unterhalb 0.030 Volt erfolgt Koagul. und zwar mit Geschw. welche für alle

Pot. Werte gleich ist.

Marc R. Ü. d. Kinetik d. Adsorption Z f. Elektrochemie 20, 515, 1914

Abhängigkeit von Rührgeschwindigkeit (Ads. von Gummi arab. u. Stärke durch $BaCO_3$, $CaCO_3$ etc.)

Ads. geschw. anfänglich ~ Rührgeschw.

der zeitliche Verlauf nicht konstant; anfangs starke Ads. später immer langsamer

also ist Ads. nicht nur durch Diffusion bedingt, sondern durch Zustand d. Oberfläche

(Wirkung anziehender mit d. Dicke d. Adsorpt. abnehmender Kräfte) mit bedingt.

[ähnlich wie bei Pt langsam Koagulation, Pt Auflösung geschwindigk. etc.!]

F. [illegible] Der Einfluss v. Elektrolyten auf d. Pot. diff. [illegible] Öl – [illegible]

[illegible] Z. Ph. Ch. 91, 1916

[illegible] $V = \frac{V_c + 0.55\,V_s}{1.55}$ $\quad W = -\frac{C_c - V_s}{1.35}$

[illegible] [illegible Elektroden ! [illegible] !]

[illegible] Pot. diff. negativ [illegible]

Kationen ...... positiv -- } [illegible]

[illegible]

85, 660, 1913

4. Freundlich u. Schucht [illegible] d. Adsorption [illegible] Z. ph. Ch. 89, 417, 1914

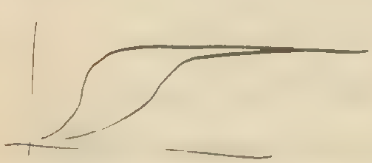
" E. Hase

HgS – Sol + Neufuchsin } [illegible]

S + "

$$\frac{dx}{dt} = 2k_2 t\,(1+b_2 x)(1-x) \quad \text{oder} = 2k_3 t\,(1+b_2 x)(1-x)^2$$

$$\frac{dx}{dt} = k_1\,(1+b_1 x)(1-x)$$



$k = \kappa\,\alpha^{\gamma}$ $\quad 2 < \gamma < 7$

$\downarrow$

adsorb. Farbstoffmenge.

H. Remy Beiträge zum Hydratproblem. Z. ph. Ch. 89, 467, 1914 (I)

Annahme: H-Ionen unhydratisiert, alle anderen hydratisiert; Änderung d. Wasserhülle aus Stokes und elektrolyt. Beweglichkeit

Ion $\quad \frac{H_2}{O}$

Hydr. Wärme

$\varphi = 0{\cdot}000045$

10°	5	125	25	50	0
	1414	1655	2208	4709	1307
	1307	1307	1307	1307	
	107	0348	0901	3402	

1307 . 1000
9~~74 77~~

1307
8149
1763

1410|3

$\frac{1307}{1004}$ = 1302.

1243
3729
24
1618

1663 . 1302
4989
33
2165

4016 . 1302
12048
80
5229

[illegible] rękawice
węgle do lampy

Księga baterye
Fotometr
Sznurka
Zwierciadło ?
Akkumulator

Termometr

Notatki Rachunki

A. Thiel u. E. Caspar U. d. Temp. v. Kältebädern mit festem CO_2 Z. phys. Ch. 86, 257, 1913

M. L. Blanc Ü. Kristallisation u. Auflösg. in wässrigen Lösg. Ibidem 334

abwechselnd Aufl. u. Wachst., 2 Kristall v. $K_2Cr_2O_7$ in Paraffin eingebettet mit Ausnahme einer Fläche

unbedeckte freie Fläche

gutes Umrühren ; 35°

Annahme: $\frac{dx}{dt} = K.O.(C-c)$

Löslichkeit 17.72 in 100 g Lösg.

Kristallisation

	Gewichtsabnahme in mg.	Versuchsdauer Minuten	C − c	K
A	21.1	20	1.00	0.016
	73.2	41	0.46	11
	15.6	90	0.40	0.007
	8.5	60	0.32	0.007
B	19.0	[illegible]	1.00	0.018
	16.3	46	0.46	14
	12.8	50	0.42	12
	19.1	95	0.40	10
	13.0	65	0.32	9
	5.0	50	0.25	7

Auflösg.

A	66.9	19	1.91	0.048
	38.5	20	0.93	29
	37.6	57	.86	26
	21.9	24	.60	25
	26.4	92	.15	28
	15.0	88	.11	24
B	48.7	16	1.91	0.030
	35.6	20	0.93	31
	[illegible]	44	0.86	30
	30.9	32	0.60	30
	26.1	90	0.15	30
	16.5	92	0.11	31

Freie Fläche A: [illegible] ; [illegible] mm²

Siehe M. L. Blanc u. Wichmann Z. phys. Ch. 77, 614, 1911, wo dasselbe mit ganzen Kristallen gezeigt war

Also Auflösg. wirkt die Diffusion viel [illegible], dagegen Wachstum nicht! [illegible]

A. Sachanov & N. Rjachovsky d. Viskosität v. Flüssigkeitsgemischen Zph Ch. 86, 529, 1914

Siehe auch Ostwald Zeitschr 84, 643, 1913

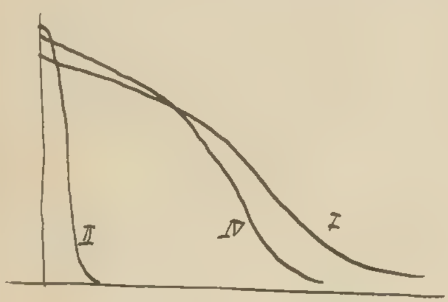
Vinke 2 ob fast Vafte$_L$; nach V e Constante a (Vol.)

$$\eta = \eta_1 \left(\frac{100-x}{100}\right)^2 + \eta_2 \left(\frac{x}{100}\right)^2 + 2\sqrt{\eta_1 \eta_2}\,\frac{(100-x)\,x}{100^2}$$

[illegible]

A. ~~Lottermoser~~ Optische Untersuchg. ü. d. Fällung d. Wolframsäure durch Säuren aus Natriumwolframatlösungen Koll. Z. 15, 145, 1914

Messung d. Lichtdurchlässigkeit mittels photoelektr. K-Zelle in Abh. d. Zeit nach Versetzen einer Na-Wolframatlösung mit HCl oder H_2SO_4



II. 100 cm³ (1/5 norm Na_2WO_4-Lösung) verdünnt auf 500 cm³ und versetzt mit 50 cm³ 2norm HCl

IV. 100 1/5 ...
500 -- 20 cm³ 2norm HCl

Tabellen

Duclaux Der Mechanismus d. Gerinnung CR 154, 1426, 1912

Ref Koll. Z. 16, 115,

[illegible]

[illegible]

Wenn also [illegible] $\frac{1 \text{ grammol}}{\text{Liter}}$ [illegible]

[illegible] 1 Liter [illegible] ; [illegible] Kolloiden der Fall [illegible]

[illegible] Koll. [illegible]

[illegible] Koll. [illegible]

Zottermann, Vers. I

250 cm³ 1/5 norm Na_2WO_4-Lösung verdünnt auf 500 cm³ und mit 50 cm³ 2 norm H_2SO_4 versetzt

Zeit	Lichtdurchl. %
1	85.9
2.5	82.6
4.5	82.6
5.5	80.3
8	80.3
10	78.2
16.5	77.3
21	74.4
31	72.4
34	71.3
38	69.4
47	66.3
53	63.2
57	62.3
69	51.4
71.5	49.4
73.5	48.4
74.5	46.5
77	43.5
78.5	41.9
80	39.0
82	37.0
84	34.9
86	31.9
87	30.9
89	28.9
90	27.2
91	26.2
93	24.3
95.5	22.3
97	19.4
98	18.4
99.5	16.5
101	14.7
102	13.7
103	12.7
105.5	11.7
108	8.8
110	7.9
112	6.9
114	6.9
116	5.0
119	4.1
124	2.0
126	4.0
128	3.5

Vers. II

100 cm³ /500

50 - HCl (2 norm)

t	
1	88.4
1.5	84.1
3	79.8
4.5	60.9
5	55.1
5.5	44.9
6	40.6
7	27.6
7.5	20.3
8	14.5
8.5	8.7
9	7.2
10	4.3
12	0

Vers. III.

Vers. IV

100 cm³ /500 .... mit 20 HCl (2 norm)

t	
1.5	85.2
3	3.8
5	7.8
7	3.0
9	0.8
11.5	1.5
14	1.5
16	2.3
18.5	1.0
24 / 23.5	79.6
26	8.8
28	8.6
30	7.9
31.5	6.0
33	5.3
37	5.6
41	2.7
43	1.6
45	69.6
47.5	6.2
49.5	5.1
51	3.3
52	1.8
54	0.4
56	58.2
58	5.3
59	3.8
61	49.7
63	~~47.7~~ 44.6
63.5	46.4
64	45.8
65	
67.5	40.9
68.5	39.0
71	34.8
73	30.5
73.5	29.3

74	28.2
76	25.7
79	22.9
81	21.6
81.5	19.3
82.5	17.9
85	14.8
87	11.8
88	11.1
89.5	10.2
91	9.4
93.5	7.8
96.5	5.7
98.5	6.3
101	5.5
105	4.7
106	3.9
109	3.2
110.5	3.2
112.5	2.4
124.5	4.7

E. Hatschek D. Beständigkeit v. Öl-Wasser Emulsionen Koll. Z. 9, 159

Untersucht v. Donnan C. Mc. C. ~~W~~ Lewis Koll. Z. 4, 5, 211 (1909) → kritische Teilchengröße, in Übereinstimmung mit Ansicht v. Donnan Zeitschr. phys. Ch. 46, 197 (1903) d. [illegible]

5, 2, 91 (1910)

E. Hatschek " 6, 5, 254 (1910)

7, 2, 81 (1910

Durchmesser ca 0.4μ, negativ (0.05 Volt), Ladung = $4.4 \cdot 10^{-7}$ (elektrostat. Einh.)

also ähnlich wie Koll. Metall lösung

Emulsion mit $\frac{1}{1000}$ Gesamtvolumen an disperser Phase

∴ cm³ enthält $3 \cdot 10^{10}$ solcher Kugeln, Abstand $3.25 \cdot 10^{-4}$ cm

Auftrieb $1 \cdot 10^{-11}$ Dyn pro Teilchen

elektrostat. Abstoßung : $\frac{(4.4 \cdot 10^{-7})^2}{(3.25 \cdot 10^{-4})^2} \cdot \frac{1}{K=80} = 2.3 \cdot 10^{-8}$ Dyn also 2300 mal so groß als Auftrieb!!

Also das System äußerst stabil

p. 163 die Stufen d. Entladung durch Kationen bei genügender Elektrolytmenge ~~[illegible]~~ wohl sogleich

wohl immer in Öl Ö.

da aber nun kein Abstoßung so findet nun Zusammenstoß und Vereinigung statt

ganz wichtig

schreitet fort mit [illegible]

[illegible]

Vergrößerung d. Teilchen [illegible] nicht ausgebildet [illegible]; oft braucht (L – [illegible]) [illegible] 20–30 Std. nach

d. [illegible] der Konstante [illegible]

Teilung und Agglomeration ganz verschiedene Vorgänge

Stabilität erklärung falsch

Gefäßwände schwach + geladen, dadurch erklärlich, dass viel Öl daran haften bleibt.

N. Pappadà Ü. Koagul. u. Entstehung d. Kieselsäure Koll. Z. 9, 164

1903–1905

hat schon vor und mit Pisani 1904 gezeigt [illegible] SiO$_2$ stabil machen, aber Pisani's [illegible] nicht immer richtig: { SiO$_2$ [illegible] stabiler durch H / [illegible] " ... OH

" ü. d. Koagul. d. Fe Cy Cu ibid p. 136

I). Koagul. wirkg. d. Elektrolyte ändert mit Wanderungsgeschw. d. Kationen (H, Cs, Rb, K, Na, Li) Cl, NO$_3$, SO$_4$

II). Wertigkeit

III meisten organischen Stoffe ganz wirkungslos

Liesegang Keimwirkung in Solen bei Diffusion Koll Z. 16 p. 76
d. d. Schichtungen Leipzig 1907

H. Freundlich u. N. Ishizaka Nachtrag z. d. Abh: Üd Bez. zw Koll. f. u. Adsorpt. u. d. Fällungsgeschwindigkeit

Zphysikch 85, 398, 1913

Versuche über die autokatalytisch verlaufende Fällung von $Al(OH)_3$ Sol sind nicht genau genug um zw. Stufe I u. II Adj. zu entscheiden.

S. Glixelli Elektrische Überführung d. Sole Koll Z 13, 194–200, 1913 (Sehr interessant)

Kieselsäuregel – Beweglichkeit nur Funktion der H Ionen ohne Rücksicht auf Anionen
gut ausgewaschen → Anode; (positive Ladung) nimmt ab mit steigender Säurekonz, isoelektrisch bei
0.00011 mol Säure, dann Umkehrung (+ Ladung steigend) Leitfähigkeit {Gel > Medium solange + Ladung; < –}!!

erinnert an Stark über die Bewegung: Beweglichkeit d. H Ionen OH

F. Herxheimer Üd Zerstreuung d Lichtes in trüben Medien Ph Z 13, 1106, 1912

Apparat für Messung d. Absorption bei verschiedener Richtg d. austretenden Strahlen

angewandt auf NH_4Cl – Dampf ((wahrscheinlich Teilchen über 0.001 mm – 0.002 mm)

1. (Richtungsabhängigkeit) Stimmt annähernd mit Rayleigh's Formel*) unter Annahme $\gamma = \frac{2\pi R}{\lambda} = 2.0$
und k (Abs Koeff = 0.002)

2. Absorption ändert sich mit der Zeit und
erreicht nach ca 1/4 Stunde ein Maximum
schließt dass Maximum für bestimmte Teilchengröße bestehe, (könnte ebensogut Effekt d. Abstandes
d. Teilchen sein).

*) ORS. 84, 42, 1911

M. Pappadà Kolloid. Ag. Koll Z. 9, 265, 1911
Alle Forscher behaupten
1). Volumänderung, 2 Elektrolytgeh. u. [illegible] mitbed. ... [illegible]

2). Gruppen treten [illegible] Koagul. [illegible] ~ [illegible] [illegible]

„Meine Theorie":
Die Koagul. beruht auf d. Stärke der in die Kolloidlösung hineindiffundierenden Ionen die das Kolloid mehr durchdringen können. Lässt man $Al_2(SO_4)_3$ [illegible] koll. Ag [illegible] Koagul. [illegible], langsam hinein diffundieren [illegible] koll. Ag [illegible] geschleudert u. [illegible] Gruppen, deren Zahl stets wächst.

Aber meine Theorie:
Die diffundierenden Ionen stoßen gegen die Kolloidteilchen und beeinflussen deren Br. B.
Wird die Br. B. d. Teilchen nicht beeinflusst, so kann es die elektr. Doppelschicht nicht neutralisieren
und verbleibt im kolloiden Zustand

C. Thomae Mitth. aus d. Praxis d. Ultramikroskopie Koll. Z. 9, 19, 1911

Tusche, Agarcolloid farben, schöne Br. B.

~~Farbe Ketten~~ Au, ~~Ag~~, Pt etc Sol wurde mit d. Zeit heller, wechselnd, was scheint d. d. ... ?

A. Dumanski G. Koll. As_2S_3 Koll. Z. 9, 262
Berechnung d. elektr. Ladung, Größe und Wertigkeit $+20$
$r = 15\mu\mu$?

S. Miyazawa J. Ch. S. Tokio 33, 1179, 1210 (1912)
N. Ishizaka Z. ph. Ch. 83, 97, (1913)
Freundlich u. N. I. " 85, 398 (1913)
S. Kawamura " " 85, ...

G H A Clowes Wirkg. d. Elektrolyte .... Koll. Z. 15, 123, 1914

Öl-Wasser-Emulsionen werden erhalten durch Schütteln von Olivenöl mit H_2O + $NaOH$ (so dass alkalisch gegen Phenolphthalein)

Wasser-Öl " zurückerhalten – – – + $CaCl_2$ (falls höherer Gehalt als äquivalent zu $NaOH$)

Falls Ca OH äquivalent, so ändert labiler Zustand

E. Wagner Änderg. einiger physik. Eigensch. d. Kolloide etc. Koll. Z. 15, 105, 1914
(Insbesondere Viskosität)

Lewis W C McC Größe u. d. Ladg. d. Ölteilchen in Öl-H_2O Emulsion Koll. Z. 4, 211 } !
" Die elektr. Ladung d. Ag Kolloid " 4, 210

H Freundlich Verminderung d. Kristallisationsgeschw. durch Fremdstoffe Z. ph. Ch. 75, 245, 1911
Koll. Z. 13, 130, 1913

Pickardt's Formel ↓ dagegen Freundlich's Annahme an Konz. d. adsorb. Anzg.

Kristallis. Geschw.: $G_0 - G = k\sqrt{c}$ ∴ $G_0 - G = k\,c^{1/n}$
↑
Konz. d. gel. Stoffs

R. Phillips Rose Einige reversible von $Al_2(OH)_3$ abstammende Hydrosole Koll. Z. 15, 1, 1914

(p. 7) = 2,6 g (Hyg. ? 10% K_2SO_4) s — Gruppenbildung sehr scharf beobachtet. Illustration

Also nicht absolut zusammenhängend!

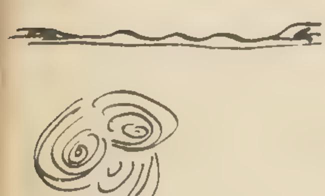
F. Hartwagner. Beitrag zur Bildung koll. Au-Lösungen. Koll. Z. 16, 79, 1915

$AuCl_3$ + Alkoh. bewirkt sehr langsame Au-Abscheidung, aber sehr rasch im Sonnenlicht

Ebenso andere Reduktionsmittel. Tiefes Licht auch, aber schwächer. Sieh auch L. Vanino
Koll. Z. 2, 51, 1907

W. Fischer-Treuenfeld Rhythmenbildung bei d. Erstarrung d. Schwefels

Koll. Z. 16, 109, 1915



auf Glaswand

durch Strömung auf die erstarrende Masse

Erklärung auf Grund d. Volumenänderung bei Erstarrung

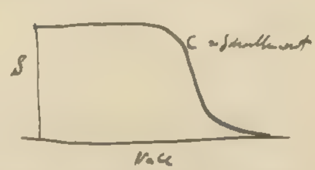
Vielleicht auch meine Runzelungen so!

A. Bethe u. Th. Toropoff Elektrolytische Vorgänge an Diaphragmen Zphys. Ch. 88, 689, 1914; 89, 597, 1915

Sven Odén Ü. d. Darstellung koll. S-Lösungen v. verschied. Dispersitätsgrad durch fraktionierte Koagulation

Koll. Z. 9, 186, 1911

$Na_2S_2O_3$ mit 0.4 n. NaCl Auflösung
oder 2.9 n. HCl
(durchsichtig gelb)



Koagulum mit H_2O wieder in Lösung, mit größeren Teilchen und ist empfindlicher gegen NaCl
(gibt trübe Lösung)

Sutton C. Ü. d. spez. Induktionsvermögen v. Flüssigk. CR 158, 621 1914

Anders Vogt's (?) e e propat. Ungleich. ...

V Br. d.

Vers. ... α - Monobrom naphthalin 4·72 ... 4·69 ...

F. Schmidt Temp. abhäng. d. Dielektr. Konst.

Bisher widersprechende Resultate betreffs fester Körper

Findet bei Schwefel Zunahme $\frac{dD}{dt} = 0{\cdot}0010$ von $-140°$ bis $+80°$

$D = 3{\cdot}87$ $4{\cdot}10$

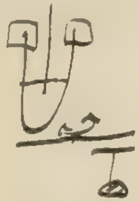
Ca Bi Na - Phosphor $\frac{dD}{dt} = 0{\cdot}0021$

K. Jayl Ü. d. Oberflächenspannung Pt - H_2O (Konstr. unterschieden mittelst Kathoden Zerstäubung mit Pt überzogen!)

Ann 42, 1221, 1913

G. Borelius Ü. elektrost. El. f. Ob. & Potentials & Elektrolyten Ann 42, 1129, 1913

Bestimmt wird Pot. diff. zw. einer in ein Gefäß eingetauchten Elektrode und d. inneren Oberfläche d. Flüssigkeit. Letzteres mittels Multiplikator methode.



D. Oberfl. Pot. d. Lösung & Kontakt v Isolatoren Ann. 45, 929, 1914

Dieselbe Methode, bei Verwendung einer Kalomel Normal elektrode zur Ableitung aus d. Innern

Gefäß etc. ... paraffiniert. Resultate $P = P_0 + k \log z$ z Zeit ...

Bei Glas auch Umkehr, ... Ein ... bei Paraffin

E. Wilke u. H. Handovsky Untersuchungen an Gelatinegallerten Ann. 42, 1145, 1913

Kitsch!

E. Kron Üb. d. Extinktion d. Lichtes in d. Erdatmosphäre f. d. Ultraviolett Ann. 45, 377, 1914

Sehr gute Übereinstimmung mit $\frac{1}{\lambda^4}$, bis 325 $\mu\mu$

(verbunden mit H_2O absorpt. (Fowle))

Unmittelb. Beobachtung ergeben $C = \frac{a}{\lambda^4} + w\, f(\lambda)$

variabel von Tag zu Tag

(Fowle) $= \frac{b}{\lambda^4} + c$ (H_2O)

Sehr interessant, auch Litteratur

Borelius G. Üb. d. elektr. Erscheinungen d. Grenzflächen v. wässerigen Lösungen u. Isolatoren

Ann. 50, 447, 1916   Siehe früher Ann 45, 929, 1914

Grenzpotentiale P nach Methode   für Paraffin – Flüssigkeit

Empirisches Resultat: $P = P_K + k \log x$ } im Bereich der dünn Konzentration bis 0·555 norm.

Leitfähigkeit (~ Konzentr.)

Pot. d. Paraffins gegenüber Lösung

Gleichgewichtsbildung ca 1/4 Stunde

Dies Gesetz gilt nur von einer Minimumkonzentration an welche ungefähr 0·001 normal ist

k Werte v. 17 Substanzen:

HCl	39·6	(Millivolt)
HNO_3	34·0	
KCl	37·8	
KNO_3	11·5	
K_2SO_4	29·7	
NaCl	25·4	
LiCl	15·1	
$CaCl_2$	16·2	
$CuSO_4$	27·9	

P_K Werte sehr schwankend

Diese k Werte lassen sich sehr empirisch darstellen durch

$k = \frac{U-V}{U+V}$ 577 [illegible] so   oder noch besser $k = A\frac{u}{u+v} - B\frac{v}{u+v}$

u, v = Wandergeschw.

	U		V
H	974	$C_2H_3O_2$	98
K	564	Cl	148
Na	369	OH	180
Li	247	J	218
Ag	517	NO_3	298

A	B
+45·3	+17·6
57·2	+11·9
48·9	+15·3
19·2	−8·8
54·0	−27·6

Also Prozesse in Elektrolyten immer fortlaufend in reinem Wasser

Erhöhung in kleinen Konzentr. [illegible] [illegible] je [illegible] Wertigkeit d. Kationen

Versucht mit Hilfe jener Formel aus Coehn's Franken's Messungen (über die isolierte Konzentr. ~~[illegible]~~ und

die P_i Werte zu berechnen:

HCl	P_i =	95 Millivolt
LiCl		120
NaCl	>	140
KCl	>	175

(falls P gegen 0'02 norm KCl = 100 gesetzt)

Schließlich Versuche (dreierlei Art) zur Erklärung der empirischen Formel

St. Glixelli: O zwiazku między Formcisnieniem a ... i elektro...

napięcie 220 Volt. pod ... 1 min.
przekrój

stężenie elektrolitów do 0·5 n.

$SiO_2 \ (H_2O)$ żel

HNO_3	0·0005 n.	+ 0·63 → ... gegen Kathode ... Wand –
	0·004	0·83
	0·026	0·64
	0·166	0·33
	0·47	0·24
		0·12
HCl	0·05	+ 0·...
	0·43	...
$BaCl_2$	0·002	+ 0·65
	0·02	0·41
	0·06	0·26
	0·5	0·17

H_2WO_4 $v = +2·00$

HCl	0·0062	+ 2·81
	0·045	+ 1·12
	0·207	+ 0·28
	0·8	0

[illegible]

[illegible]

II 8 p. 1201

Burkhardt:

Nach Poisson: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-m^2}{4x^2}u$

$$u = x^{\frac{m+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} \varphi(x\cos\omega + 2a\sqrt{t}) \sin^m\omega \, d\omega \, e^{-a^2} da + x^{\frac{1-m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} \psi(x\cos\omega + 2a\sqrt{t}) \sin^{-m}\omega \, e^{-a^2} da$$

$m=0$

$$u = \cancel{\sqrt{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} \varphi(x\cos\omega + 2a\sqrt{t})} \, d\omega \, e^{-a^2} da + .$$

durch Grenzübergang für lim m=0

$$u = \sqrt{x} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} \varphi(x\cos\omega + 2a\sqrt{t}) \log(x\sin^2\omega) \, d\omega \, e^{-a^2} da$$

$u = v\sqrt{x}$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} \log(x\sin^2\omega) \, d\omega \, \varphi(\underbrace{x\cos\omega + 2a\sqrt{t}}_{z}) \, e^{-a^2} da$$

$a = \frac{z - x\cos\omega}{2\sqrt{t}}$

$da = \frac{dz}{2\sqrt{t}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{t}} \iint \log(x\sin^2\omega) \, d\omega \;\; \varphi(z) \, e^{-\frac{(z - x\cos\omega)^2}{4t}} dz$$

$$\cancel{N} R^2 \pi c \cdot \frac{2m}{3} = \frac{2}{3} m N \underbrace{\sqrt{R^2 \pi c}}$$

$$\Lambda = \frac{8}{3}\frac{c}{\sqrt{n R^2 \pi c}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{c}{n}}$$

$$mc^2 = \frac{4}{3} R^3 \pi C^2$$

$$\mu \frac{dC}{dt} = -\underbrace{N R^2 \pi c \cdot \frac{2mC}{3}}$$

$$\Lambda = c\sqrt{\frac{2m}{\frac{2}{3} m n R^2 \pi c}} = \sqrt{\frac{3c}{N R^2 \pi}} = \frac{1}{R\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{3c}{N}}$$

An Stelle von: $6\pi\mu R$

Kraft: $\frac{2}{3} mc \frac{R^2 \pi N}{\cancel{2}} = \frac{2}{3} R^2 \pi N C \sqrt{mM}$

$$c\sqrt{m} = C\sqrt{M}$$

Dyn. Cunningham: $\frac{8}{3}(2R)^2 N \sqrt{\frac{\pi m}{M}}$

Ehrenhaft: 1). Falls Teilchen aus Metall und Wasser zusammengesetzt sind

$$\frac{4\pi}{3}\left[a^3 s + (A^3 - a^3)\right] g = 6\pi\mu A v$$

$$v = \frac{2g}{9\mu}\underbrace{\frac{a^3(s-1) + A^3}{A}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial A} = -\frac{a^3}{A^2}(s-1) + 2A \qquad \Big|^{A=a} = a(3-s)$$

~~somit fallen Teilchen mit Wasserschichte schneller als solche ohne Wasserschichte, falls $s<3$~~

also fallen solche ohne Wasserschichte schneller als Teilchen mit Wasserschichte, falls $s>3$

bis Grenzwert erreicht wird wo:

$$2A^3 = a^3(s-1) \qquad \boxed{A = a\sqrt[3]{\frac{s-1}{2}}} \quad \text{z.B. für Platin } A = 2{,}15\,a$$

~~$a^3(s-1) + A^3 = \ldots$~~ in diesem Falle: $v = \frac{2g}{9\mu} 3A^2$

Falls s in Ehrenhafts Formel $= 1$ anstatt 21 (Platin), wird e im Verhältnis $\sqrt{21}$ grösser, womit alle Werte grösser werden als 3.10^{-10} (nicht anwendbar auf Phosphorteilchen)

2). Falls ~~Stokes'sche Formel~~ Orientation im el. Feld welche darin die Fallbewegung erleichtert (zu constatieren durch Reversiren des Feldes)

$$eE - \frac{4a^3\pi}{3}sg = \varepsilon\, 6\pi\mu a v_1$$

$$\frac{4a^3\pi}{3}sg = 6\pi\mu a v_2$$

$$e.E = 6\pi\mu a\,(v_2 + \varepsilon v_1)$$

$$= \frac{18\,\mu^{3/2}\pi}{\sqrt{2sg}}(v_2+\varepsilon v_1)\sqrt{v_2}$$

dann müsste wirkliches e noch kleiner sein als nach Ehrenhaft berechnet

M $\frac{dC}{dt}$

Fokker! Debijs Dipole Ph Z 13, 97, 1912

V D Ph G. 15, 777, 1913

M

$\frac{dC}{dt}$

sta Nr ...
Targu głos...
zymała 3092 głosów...
sów, 1 mandat, lista ...
ka ND i Stronnictwo Lud...
5 mandatów.
...ęzu wszystkie 32 mandatów
...BB.
...rzebini wszystkie 16 mandatów zdobył
...zanowie: Wszystkie 24 mandaty zdo-

...wynik wyborów z ...
...dydaci: 12 z BB, 3 bezp...

Redaktor naczelny i c...
Dr Antoni Be...
Wydawca: Spółka wyda...

...rych prześcieradeł i niewystarcza-
...pagatu, przytrzymującego takowe,
...wne niedokładności „kostjumów",
...się Maharadży zmusza konferan-
...improwizowanych dodatków. Wresz-
...się i Maharadża ze srebrną twarzą,
...kowatem czaku na głowie, w koloro-
...chtach na grzbiecie, w parcianych
...ch niżej i ilustruje „śpiew" chóru ru-
...iebardzo zresztą obmyślanemi. Z ca-
...meru" zostaje jednak wrażenie ja-
...otyczności, jakiegoś przeniesienia w
...cyjny wymiar, a to wrażenie stanowi
...werturę dla „Mątwy".
... dla połączenia samego dramatu z ową
... reżyser dodał mu chór, który „mu-
try" hałasem polifonicznym, dochodzą-
któr... z jakiejś koszary owiec, napadanej
... lub też z jakiejś — rzeźni, zapowiada
... ręka, zaznaczona
...orękiego (druga ... malarza, Pawła
... kabłąkiem ... turowemi de-
...ecież z dwie ... i grzbiet.
...ają ...mi ... łowemi, na
...wana kr... ch, wypo-

staje w drodze Narzeczona
na pomoc Matką, król ob...
mieczem zabija. Paweł d...
solutu życia dopiero w...
ną w postaci bezrękiej...
dominiwszy sobie w dy...
Hirkan jest zwykły...
króla Hirkanji d...
na tron Hirkan...
ną przez Juljus...
ką, kochanką...
i milczącym...
drogę do peł...
Przed Her...
nej drodze z...
i Grzech. G... obi... t. I.
Louys wziąć ... Herkulesa ...
wicz otacza swego Wiarą, Wład...
drodze Sztuką, Miłością, w paradoksal... or-
ciem i doprowadza go dialektyce do ...
mimo to konsekwentnej Życia z wszys...
nego affirmowania z wyjątkiem perwer...
padłościami ... serj...
Walka o idea... biera...
ręka z przesz... lej z...
... tak, ... ata...

...opada.
...
...mis...
tem, że
kańskiego

0·4343 . 155
21715
2170
67317

·31683

1903
7612
3268
0880
3802
7078

$4! = 24$

$\log 5! = 0·0158_2$

$\epsilon - r_2$ 0·2123
1061
~~106~~
~~2240~~

0·3290
1645
165
5100 : 2 = 255

0·05102
2551
255
7908 : 5 = 158₂

788 / 679   1/212

671 / 646   1/329

745 / 712   1/255

868 / 815   1/32

949 / 889   1/051

8965   8319   (547
1582   3263
7383

8267   8102
3274   5172   3·16
4993

8722   1585
~~8734~~   ~~4065~~
4065
2650   2650
6072

9385   9112
0318   7206
9067   0318

20·7

9773   9489
6565   7076
3208   6565

18
−12
−12
2

8
5

3
−4
9 = 112

9
8
0
2 : 7·85

	bar	emp
0	5·5%	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	7·8
4	[illegible]	18·0
5	[illegible]	17

124 · 5 18%

= 1·1

2
6 : 9 = [illegible]

150 · 112 = 3[illegible]

$$\nu_n = \nu_0 \frac{\left(\frac{\alpha\nu_0 t}{2}\right)^{n-1}}{\left[1+\frac{\alpha\nu_0 t}{2}\right]^{n+1}} = \cancel{\nu_0 (\alpha t)^{n-1}}\ \nu_0 \frac{\varepsilon^{n-1}}{[1+\varepsilon]^{n+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\nu_n) = \nu_0\left\{ \frac{(n-1)\,\varepsilon^{n-2}}{[1+\varepsilon]^{n+1}} - \frac{(n+1)\,\varepsilon^{n-1}}{[1+\varepsilon]^{n+2}} \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}(\nu_n) = \nu_0\left\{ \frac{(n-1)(n-2)\,\varepsilon^{n-3}}{[1+\varepsilon]^{n+1}} - 2\frac{(n-1)(n+1)\,\varepsilon^{n-2}}{[1+\varepsilon]^{n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)\,\varepsilon^{n-1}}{[1+\varepsilon]^{n+3}} \right\} = 0$$

$$(n-1)(n-2) - 2(n-1)(n+1)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + (n+1)(n+2)\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} = 0$$

$$\varepsilon^2\left[(n-1)(n-2)+(n+1)(n+2)-2(n-1)(n+1)\right] + \varepsilon\left[\underbrace{2(n-1)(n-2) - 2(n-1)(n+1)}\right] + (n-1)(n-2) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &n^2-3n+2 \\ &n^2+3n+2 \\ &-2n^2\quad\ +2 \end{aligned}\right\} = 6 \qquad \begin{aligned} &2(n^2-3n+2) \\ &-2(n^2-1) \end{aligned}$$

$$6\varepsilon^2 + 2\varepsilon(-3n+3) + (n-1)(n-2) = 0$$

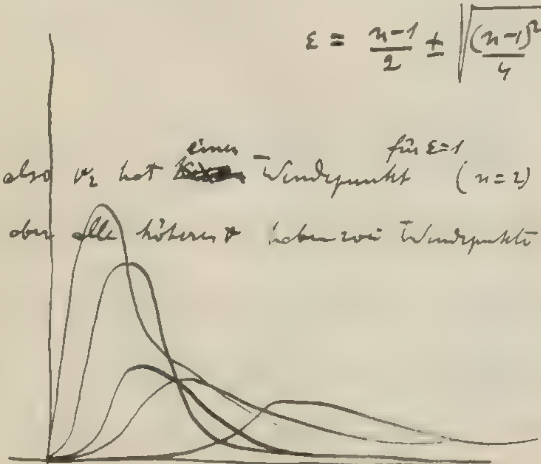
$$\varepsilon^2 \cancel{+} - \varepsilon(n-1) = -\frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\varepsilon = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{n-1}{12}(3n-3-2n+4)}$$

$$= \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

also ν_2 hat ~~keinen~~ einen Wendepunkt für $\varepsilon=1$ $(n=2)$

aber alle höheren haben zwei Wendepunkte



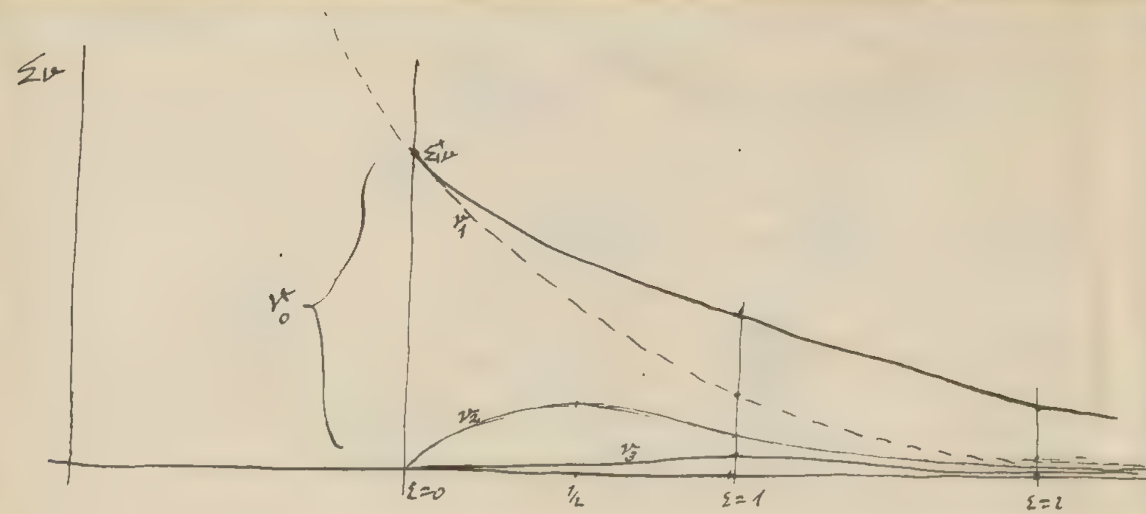
Für $n=2$:

$$\frac{\partial\nu_2}{\partial\varepsilon} = \nu_0\left\{\frac{1}{(1+\varepsilon)^3} - \frac{3\varepsilon}{(1+\varepsilon)^4}\right\}$$

$$\frac{\partial^2\nu_2}{\partial\varepsilon^2} = \nu_0\left\{-\frac{6}{(1+\varepsilon)^4} + \frac{12\varepsilon}{(1+\varepsilon)^5}\right\} = 0$$

$$\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = +1$$

$$\varepsilon = 1$$



Voraussichtl. Einfluss der Rührgeschwindigkeit

Um jedes Teilchen bildet sich ein „Diffusionshof" von einer Grösse, welche mit Radius d. T. vergleichbar.

Sobald derselbe (für Zeiten, welche der betreff. K.Z. entsprechen) merklich deformiert erscheint, dürfte eine merkliche Änderung in der Koag. Zeit eintreten also

$$2Dt = R^2 \qquad R\frac{\partial v}{\partial s}t \sim R \qquad D = \frac{1}{6\pi R\mu}\frac{H\theta}{N} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} \sim \frac{2D}{R^2} = \underbrace{\frac{H\theta}{N}\frac{1}{3\pi\mu}}_{\frac{8\cdot 3.10^7.300}{6\cdot 2.10^{23}}\frac{1}{\pi\mu}}\left(\frac{1}{R}\right)^3$$

$$\frac{1}{8.10^{-18}} = \frac{1}{2}10^3$$

Siehe auch spätere Berechnung!

also falls Rührgkeit zwischen zwei Zylinderflächen mit 2 mm Abstand (wie beim Couette'schen Apparat für Zähigkeitsbestimmung) eingeschlossen, so müsste die Lineargeschw. der einen Fläche $\frac{100\text{ cm}}{\text{sek}}$ betragen!!

Eine verschiedene Schätzung: falls innerhalb Koagulationszeit eine merkliche Änderung des mittl. Abstands je zweier benachbarter Teilchen eintritt (da dies auf die Grösse der relativ. Wahrsch. einwirken sollte)? Ist dies falsch?

Curve E

		$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$	$\sqrt{\frac{n_0}{n}}$	ε		$\frac{\varepsilon}{t} =$	$\log\frac{n_0}{n} = \varepsilon^{10}\log e$	$\frac{\varepsilon}{t}{}^{10}\log e$
$t=0$	$n = 1.97_5$	1	1	0		0		87
2	1.35	0.69	1.21	0.21	450 0.23	0.10_5	0.164	0.0820 (0.189)
5	1.19	0.60	1.29	0.29	66 0.13	0.058	0.219	0.0438 (0.101)
10	0.89	0.45	1.49	0.49	1.27 0.12	0.049	0.345	0.034_5 (0.0794)
20	0.52	0.26	1.95	0.95	2.79 0.14	0.047_5	0.579	0.0290 (0.0668)
40	0.29	0.15	2.61	1.61	579 0.145	0.040_3	0.832	0.0208 (0.0479)

$\boxed{0.0456}$

$1+\varepsilon = \sqrt{\frac{n_0}{n}}$

$\varepsilon = \sqrt{\frac{n_0}{n}} - 1$

$$\frac{\varepsilon}{t} = \frac{\alpha\nu_0}{\Sigma} = 4\pi D R_{11}\nu_0 = 4\pi R\nu_0 \cdot \frac{H\theta}{N} \cdot \frac{1}{6\pi\mu x} = \frac{2}{3}\nu_0 \frac{H\theta}{N}\frac{1}{\mu}\frac{R}{r}$$

Curve F.

		ε	$\frac{\varepsilon}{t}$			$\varepsilon^{10}\log e$	$\frac{\varepsilon}{t}{}^{10}\log e$	$\beta = \frac{\varepsilon}{t}$
$t=0$	$n = 1.97$							
3	1.56	0.12	0.040	0.26	0.087	0.101	0.0397	0.0776
20	1.02	0.39	0.019_5	[illegible]	.46	0.286	0.0143	0.03[illegible]9
40	0.66	0.73	0.018_3	1.[illegible]	0.49	0.475	0.0119	0.0274
	0.76	0.61	0.015_3	159	0.040	0.414	0.0103_5	0.0238
60	0.44	1.12	0.0187	340	0.058	0.651	0.0108_5	0.0250
80	0.49	1.00_5	0.0126	302	0.038	0.604	0.00755	0.0174

$\boxed{0.0188}$

Curve D.

		ε		$\frac{\varepsilon}{t}$		
$t=0$	$n = 1.93$					
2	1.42	0.166	0.36_0	0.083	.0667	0.0333_3
8	1.17	0.284	0.65_0	0.035_5	.109	0.0136
20	0.75	0.604	1.54	0.0302	.160	0.00800
30	0.52	0.927	2.71	0.0309	.193	0.00643

0.0322

also ist jedenfalls die Übereinstimmung mit der Formel $e^{-\varepsilon}$ nicht schlechter

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{\varepsilon}{t}}{\frac{2}{3}\,\frac{H\theta}{N}\,\frac{1}{\mu}\;v_0}$$

$$H = 8.31\cdot 10^{7}$$
$$N = 6.2\cdot 10^{23}$$
$$\theta = 290$$
$$\frac{1}{\mu} = 100$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{6.2\cdot 10^{23}\cdot 0.01}{8.31\cdot 10^{7}\cdot 290}$$

$$\frac{9.4\cdot 10^{21}}{8.31\cdot 10^{7}\cdot 290} = \frac{9.4}{8.31\cdot 0.29}\,10^{11}$$

$$\begin{array}{r} 11.9590 \\ 0.3820 \\ \hline 11.5770 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9196 \\ 4624 \\ \hline 3820 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{t} = 0.0456 \\ v_0 = 0.552\cdot 10^{10} \\ \frac{R}{r} = 3.12 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} 0.6590-2 \\ +\,11.5770 \\ \hline 10.2360 \\ -\,9.7419 \\ \hline 0.4941 \end{array}$$

Curve E

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{t} = 0.0188 \\ v_0 = 0.27\cdot 10^{10} \\ \frac{R}{r} = 2.63 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} 0.2742-2 \\ 11.5770 \\ \hline 9.8512 \\ -\,9.4314 \\ \hline 0.4198 \end{array}$$

Curve F

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{t} = 0.0322 \\ v_0 = 0.80\cdot 10^{10} \\ \frac{R}{r} = 1.52 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} 0.5079-2 \\ 11.5770 \\ \hline 10.0849 \\ -\,9.9031 \\ \hline 0.1818 \end{array}$$

Curve D

Mögliche Fehlerquellen: Diffusionskraft gehorcht nicht genau der Einstein Formel sondern ist kleiner

Inhomogenität der Teilchengröße

Einfluss der Schwere; Erweiterung: $4\pi D R \left[1 + \underbrace{\frac{R^2\pi}{4\pi D R}\,\frac{2}{9}\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{g(\rho-\rho_0)}{\mu}}\right]$

$$\frac{R^3 g(\rho-\rho_0)}{72\cdot D\mu} = \frac{R^4\pi\, g(\rho-\rho_0)}{12\cdot\frac{H\theta}{N}}$$

$$D = \frac{H\theta}{N}\,\frac{1}{6\pi R\mu}$$

$$= \frac{R^4(\rho-\rho_0)\,3\cdot10^3}{12\cdot\frac{24\cdot10^{10}}{62\cdot10^{23}}} = R^4\Delta\rho\cdot\frac{2}{3}\,10^{16}$$

Kommt also bedeutend in Betracht, sobald: $R^4\Delta\rho = 10^{-16}$ z.B. für Gold $\Delta\rho = 20$

Ebenso wie Kondensation von Wasserdampf an Nebeltröpfchen

$R = \frac{10^{-4}}{\sqrt[4]{20}} = \frac{1}{2}\cdot10^{-4}$ cm $= \frac{1}{2}\mu = 500\mu\mu$

(elastisches oder viskoses?) ?

Falls Doppelschicht nicht entladen wird, dürfte sie wie ein Polster wirken so dass von den auf R stossenden Teilchen nur ein gewisser Bruchteil kleben bleibt (so wie Gummigutt-Glas wenn wenig Elektrolyt) also wäre dann

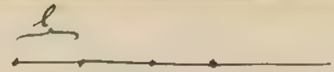
$\beta = 4\pi n D R(\alpha)$

$$v_1 = \frac{v_0}{(1+\beta t)^2}$$

und der Bruchteil α, welcher die ~~auf~~ nicht reflektierten Teilchen repräsentiert, würde mit abnehmender Konzentr. rasch gegen 1 konvergieren

Sonst könnten aber alle Gleichungen ebenso gültig bleiben. Es würde dann für verschiedene n die Zeit, wann ein gewisser Bruchteil koaguliert, prop $\frac{1}{n}$ werden – wie Paine gefunden hat, und die Gestalt der Curven für verschiedene α Werte (infolge verschied. Elektrolyt Konzentr.) wäre ähnlich zu machen durch Veränderung d. Zeitmassstabes, in Übereinstimmung mit Freundlich und Paine).

$\vartheta = \frac{i\pi}{2(n+1)} = \cancel{\frac{\pi x}{\lambda l}}$ $\qquad \lambda = \frac{\pi l}{\vartheta}$



$v = a\frac{\sin\vartheta}{\theta} = a\frac{\sin\frac{\pi l}{\lambda}}{\frac{\pi l}{\lambda}} = cl\frac{\sin\frac{\pi l}{\lambda}}{\frac{\pi l}{\lambda}}$ $\qquad c^2 = \frac{T}{ml}$

$y_k = \sum A \cos(2c \sin\theta . t + \omega - 2k\theta) + \dots$

$= \sum A \cos\left(2c\sin\theta . t\left[1 - \frac{kl\theta}{lcl\sin\theta}\right] + \omega\right)$

$\left[1 - \frac{x}{vt}\right]$

$T \; 2c\sin\vartheta = 2\pi$

$T = \frac{\pi}{c\sin\vartheta} = \frac{\pi l}{a\sin\vartheta}$

$n = \frac{1}{T} = \frac{a\sin\vartheta}{\pi l}$

$U = v - \lambda\frac{\partial v}{\partial\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} v &= a\frac{\lambda}{\pi l}\sin\frac{\pi l}{\lambda} \\ \frac{\partial v}{\partial\lambda} &= \frac{a}{\pi l}\sin\frac{\pi l}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}\cos\frac{\pi l}{\lambda}\end{aligned}\right\} U = \frac{a}{\lambda}\cos\frac{\pi l}{\lambda}$$

Für kürzeste mögliche Wellen, wo $\lambda = 2l$, ist: $v = \frac{2a}{\pi}$

$U = 0$!

in Ω, K. Notation:

$\omega = \frac{\nu_0}{2\pi}\lambda\sin\frac{\pi a}{\lambda}$

$\frac{\varphi}{2} = \arcsin\frac{\nu}{\nu_0}$ $\qquad \cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\nu}{\nu_0}$

$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2}$

$U = \omega - \lambda\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} = \frac{\nu_0 a}{2\lambda}\cos\underbrace{\left(\frac{a\pi}{\lambda}\right)}_{=\frac{\varphi}{2}} = \frac{\nu_0}{4\pi}\varphi.\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{\nu}{\nu_0}\cdot\sqrt{\nu_0^2-\nu^2}$

In jedem Stück L der Saite (falls genügend viele Massenpunkte enthalten sind) sind auch alle Schwingungen vorhanden mit der Dichteverteilung $\frac{NL}{2\pi}d\varphi$, und jede mit Energie $\frac{R}{N}\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}$

Falls nun Energiedichte verschieden ist

Temperaturgefälle $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ wird Energietransport

$$J = \int \underbrace{(E_{x+\Delta x} - E_x)}_{\Delta x = a\ ?} \frac{U}{2}\, N_\nu\, d\nu$$

hervorbringen (indem man sich vorstellt dass die halbe Energie nach jeder Seite wandert)

$$J = \int \frac{\frac{R}{N}\frac{(\beta\nu)^2}{T^2}\, e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left[e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right]^2}\, \frac{\partial T}{\partial x}\cdot a\, \frac{U}{2}\, \frac{Na}{2\pi}\, d\varphi$$

Demnach wäre Wärmeleitfähigkeit:

$$K = \frac{Na^2}{4\pi}\frac{R}{N}\int \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left[e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right]^2}\, U\, d\varphi$$

Grenzfall niedriger Temperatur: $K = \frac{a^2 R}{4\pi}\int_{\nu=0}^{\nu_0} \left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\, \frac{\arcsin\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)}{2\pi}\cdot d\nu$

$$= \frac{a^2 R\, \beta^2}{8\pi^2 \nu_0}\int \frac{\nu^3}{T^2}\, e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\, d\nu \qquad \frac{\beta\nu}{T} = z$$

$$= \frac{a^2 R\, T^2}{8\pi^2 \beta^2 \nu_0}\int_0^\infty z^3 e^{-z}\, dz$$

Hohe Temperatur: $K = \frac{a^2 R}{4\pi}\int U\, d\varphi = \frac{a^2 R}{4\pi}\int_0^{\nu_0} \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{\nu}{\nu_0}\cdot d\nu$

$$= \frac{a^2 R}{4\pi}\frac{\nu_0}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2} = \frac{a^2 R\,\nu_0}{4\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\psi\cos\psi\, d\psi}_{\underbrace{\psi\sin\psi - \int\sin\psi\, d\psi}_{(\psi\sin\psi+\cos\psi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1}}$$

$$= \frac{ac\,R}{2\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

also unabhängig von Temperatur

$3R = 6$ (cal).
$R = 2$ (cal) $= 8{,}4\cdot 10^7$ (Erg)
$\frac{\nu_0 a}{2} = c =$ Geschw.
$= 10^{-8}\cdot\frac{10^5\cdot 2}{10}\; 05 = \frac{1}{2}\,10^{-4}$ (cal)

Koagulation nach [illegible]

Nur jene Teilchen fallen aus, welche mehr als n Anfangsteilchen vereinigt enthalten

~~[illegible]~~ In Lösung bleibendes Kolloid:

$$\nu_1 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2+2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \qquad \nu_1+2\nu_2+3\nu_3 = \frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2+2\varepsilon+2\varepsilon^2+3\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^4} = \frac{1+4\varepsilon+6\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^4} = 1-\frac{\varepsilon^4+4\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)^4}$$

$$\nu_1+2\nu_2 = \frac{1+3\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3} = 1-\frac{\varepsilon^3+3\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^3}$$

$$\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+4\nu_4 = \frac{(1+\varepsilon)^3+2(1+\varepsilon)^2\varepsilon+3(1+\varepsilon)\varepsilon^2+4\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)^5} = \frac{1+5\varepsilon+10\varepsilon^2+10\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)^5}$$

$$= 1-\frac{\varepsilon^5+5\varepsilon^4}{(1+\varepsilon)^5}$$

$$\sum_1^n k\nu_k = 1-\frac{\varepsilon^{n+1}+(n+1)\varepsilon^n}{(1+\varepsilon)^{n+1}} = 1-\frac{n\varepsilon^n}{(1+\varepsilon)^{n+1}}-\frac{\varepsilon^n}{(1+\varepsilon)^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon^{n-1}(n+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^n}\right] = \frac{5\varepsilon^4+20\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)^5}-\frac{5(\varepsilon^5+5\varepsilon^4)}{(1+\varepsilon)^6} = \frac{5\varepsilon^4+20\varepsilon^3+5\varepsilon^5+20\varepsilon^4-5\varepsilon^5-25\varepsilon^4}{(1+\varepsilon)^6}$$

Kein Maximum außer $\varepsilon=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} = \frac{60\,\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^6}-\frac{120\,\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)^7} = 0 \qquad 1-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = 0$$

$\varepsilon = 1$ Wendepunkt

~~In [illegible]~~ $$\sum_1^4 \cancel{k\nu_k} = 1-\frac{4+2}{2^{4+1}} = 1-\frac{6}{2^5} = 1-\frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

Also

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

$$1+\frac{1}{\varepsilon} = \sqrt[n]{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$$

Halbwert: $\dfrac{\varepsilon^{n-1}}{(\varepsilon+1)^{n-1}}\,\dfrac{\varepsilon+n}{\varepsilon+1} = \dfrac{1}{2}$

$$\cancel{3^4\cdot\frac{11}{6^5} = \frac{2^6\cdot 2}{3^5\cdot 2^4} = \frac{3}{16}}$$

Für große ε und n $\quad \Sigma = 1-\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n+1}\left(1+\frac{n+1}{\varepsilon}\right)$

$$= 1-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}\left(1+\frac{n}{\varepsilon}\right) = 1-e^{-\frac{n}{\varepsilon}}\left(\frac{n}{\varepsilon}+1\right)$$

Allgem. Gleichung in $\frac{\varepsilon}{n}=x$ $\quad \Sigma = 1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} = (n+1)\,\frac{\varepsilon^{n+1} + (n+1)\varepsilon^{n}}{(1+\varepsilon)^{n+2}} - \frac{(n+1)\varepsilon^{n} + n(n+1)\varepsilon^{n-1}}{(1+\varepsilon)^{n+1}} = \frac{\cancel{(n+1)\varepsilon^{n+1}} + \cancel{(n+1)^2\varepsilon^{n}} - \cancel{(n+1)\varepsilon^{n}} - n(n+1)\varepsilon^{n-1} - \cancel{(n+1)\varepsilon^{n+1}} - \cancel{n(n+1)\varepsilon^{n}}}{(1+\varepsilon)^{n+2}}$$

$$= -\frac{n(n+1)\,\varepsilon^{n-1}}{(1+\varepsilon)^{n+2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} = \Big|\ \frac{(n-1)\,\varepsilon^{n-2}}{(1+\varepsilon)^{n+2}} - \frac{(n+2)\,\varepsilon^{n-1}}{(1+\varepsilon)^{n+3}} = 0$$

$$n-1 - (n+2)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = 0$$

$$n-1 + \cancel{n\varepsilon} - \varepsilon - \cancel{n\varepsilon} - 2\varepsilon = 0$$

$$3\varepsilon = n-1$$

Wendepunkt: $\underline{\underline{\varepsilon = \frac{n-1}{3}}}$

$$\sum^{n} \cdots = 1 - \frac{(n-1)^{n+1} + 3(n+1)(n-1)^{n}}{(n+2)^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{(n-1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}\underbrace{\left[1 + \frac{3(n+1)}{n-1}\right]}_{\frac{4n+2}{n-1}} = 1 - \underbrace{\frac{(n-1)^{n}(4n+2)}{(n+2)^{n+1}}}$$

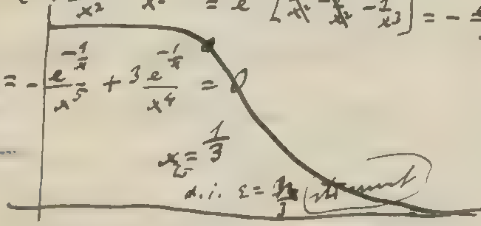
$$\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n}\frac{4n+2}{n+2} \doteq 4\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n}$$

$$= 4\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{n} = 4\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}$$

$$= 4\,e^{-3}$$

$$\varepsilon_W = 1 - \frac{4}{e^3} = 1 - \frac{\cancel{4}\ 1}{\cancel{2{\cdot}8}\cdot\cancel{2{\cdot}4}\cdot\cancel{3{\cdot}2}} = 1 - \frac{1}{5{\cdot}4}$$

0·6 ·9



$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}\left[\cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x^3}\right] = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} + 3\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} = 0$$

$$x_W = \frac{1}{3}$$

d.i. $\varepsilon = \frac{n}{3}$ (stimmt)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{n(n+1)(n-1)^{n-1}}{(n+2)^{n+2}}\cdot 3^3$$

$$= -3^3\cdot\frac{n(n+1)}{(n+2)^3}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-1}$$

K. Infolge dessen ~~fällt~~ ist der Vorgang anders als . .

~~da die jetzt Negationsterme an~~

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_W = -e^{-3}\cdot 3^3 = -\left(\frac{3}{e}\right)^3 = -1{\cdot}34$$

4771
4343
0428 . 3
1284

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_{30} = -e^{-1} = -\frac{1}{2{\cdot}8}$$

Für $\varepsilon = n-1$:

$$\varepsilon = 1 - \frac{(n-1)^{n+1} + (n+1)(n-1)^{n}}{n^{n+1}} = \cancel{\cdots}$$

$$= 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}\left[1 + \frac{n+1}{n-1}\right] = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}\frac{2n}{n-1} = 1 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}$$

$$\doteq 1 - 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = 1 - 2e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{2}{e} = \frac{0{\cdot}8}{2{\cdot}8} \doteq \frac{1}{3{\cdot}5}$$

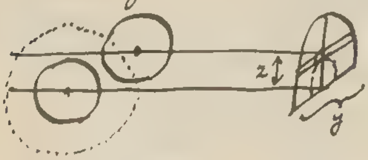
Einfluss der Bewegung d. Mediums auf Koagulation

Lässt sich in Einstein's Weise darstellen, so dass nach ~~Abz~~ Abzug d. Translation u. Rotation ~~eine~~ eine Dehnung und Pressung übrig bleibt.

Es wird natürlich dadurch der ganze Diffusionsstrom vermehrt, vor Allem aber dadurch, dass die Mittelpunkte welche in die R-Sphäre eintreten alle haften bleiben müssen. [Das ist allerdings nicht streng; die Gestalt der Strömungslinien wäre bei Zusammenstossen zweier Kugeln eine and.]

Anstatt dessen auch primitive direkte Überlegung:

Grössenordnung d. Anzahl der pro Zeiteinheit an eine Kugel stossenden Teilchen:



$$2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) z \, dz\, dy\, n = 2n\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 dr\, d\varphi \cos\varphi$$

$$= \frac{4}{3} n\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)(R^3 - r^3)$$

Also ist relative Grösse d. Bewegungseinflusses: $10^{-} = 10^{-6}$

$$\frac{\frac{4}{3} n\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)(R^3-r^3)}{8_{,}\pi D R\, n} \mp \frac{1}{6\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{R^2}{D} = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{R^2 r}{\frac{H\theta}{N}\frac{1}{6\pi\mu}}$$

Somit kann Bewegung für kleine Teilchen vollständig ausser Betracht bleiben, wenn sie für grosse bereits sehr erheblich wäre.

$\frac{6.10^{23}.10^{-2}}{8.10^7.300} 4.10^{-48} = 10^{-6}$

$\frac{0'01.4.(2'4)^3 10^{-18}}{4.10^{-14}} = 0'14.10^{-4}$

Curve Σ:

$$D = \frac{H\theta}{N}\frac{1}{6\pi\mu r} = \frac{8'3.10^7.300}{6'2\,10^{23}.6\pi.0'01.2'4.10^{-7}} = \frac{8'3.10^9}{12.\pi.2'4.10^{14}} = 10^{-7}$$ 4.10^{-14}

$\boxed{\text{für } r = 2'4.10^{-6} = 24\,\mu\mu}$

$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 6\pi\frac{D}{R^2} = 2\cdot\frac{10^{-6}}{(5.10^{-6})^2} = 2\frac{10^6}{25} = 8.10^4$! Dagegen, falls $R = 2r$ beibehalten wird,

würde bei $r = 1\mu$ = ~~...~~ $= 1000\,\mu\mu$ ~~$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{4.10^4}{(20)^3}$~~ =

$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{4.10^4}{(40)^3} = \frac{1}{1'6}$ bereits Vermehrung auf die Hälfte bewirken

desto mehr natürlich bei sichtbaren Flocken; dies erklärt überraschend den Einfluss des Umrührens auf die Geschw. der Absonderung, welchen Perrin beobachtet hat

---

Reversible Kolloide nach Art von Odén's Schwefelkolloid sind wohl in der Art zu behandeln wie Boltzmann II p. 213

Aggregat aus n Teilchen: 

hat die kleinste Oberfläche, wenn möglichst kugelförmig; wegen der Anziehungskräfte wird das aber doch die wahrscheinlichste Form sein. Ellipsoidische Abweichung berechenbar aus potentieller Energie?

Annähernde Berechnung der Oberfläche: Halbkugel hat zweimal so grosse Fläche wie Grundkreis

also: $O = 8 R^2 \pi \qquad \left(\frac{R}{r}\right)^3 = n\alpha \qquad \alpha =$ Auflockerungskoeffizient

Länge und Zahl der kritischen Linien (wo 2 Anziehungssphären ineinander greifen)

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{\pi} N \delta^2 r = O \\ \cancel{4} N \delta r = Z \end{array}\right\} Z = \cancel{4}\frac{\pi r O}{\cancel{4}\pi} = \frac{\cancel{4} O}{\delta} = \frac{O}{2r}$$

Anzahl der kritischen Punkte (wo 3 Anziehungssphären ineinandergreifen)

$$N = \frac{Z}{\delta} = \frac{O}{\delta^2} = \frac{O}{4r^2}$$

$$\therefore \quad O = 8\pi r^2 (n\alpha)^{2/3} \qquad Z = 4\pi r (n\alpha)^{2/3} \qquad N = 2\pi (n\alpha)^{2/3}$$

$$\cancel{\nu_1 : n\nu_n = V :}$$

$$\nu_1 : (n+1)\nu_{n+1} = V : \nu_n \left(O\delta e^{\overbrace{2h\chi}^{\beta}} + Z\delta^2 e^{\overbrace{4h\chi}^{\beta^2}} + N\delta^3 e^{6h\chi} \right)$$

$$= V : \nu_n \cdot n^{2/3} \left[8\pi r^2 \delta\beta + 4\pi r \delta\beta^2 + 2\pi \delta\beta^3 \right] \alpha^{2/3}$$

$$(n+1)\nu_{n+1} : n\nu_n = \nu_n n^{2/3} : \nu_{n-1} (n-1)^{2/3}$$

$\nu n = 2$

$$\cancel{x_{n+1} = z_n = \frac{z_n}{\sqrt[3]{n}} : \frac{z_{n-1}}{\sqrt[3]{n-1}}}$$

$$\cancel{\frac{z_n^2}{\sqrt[3]{n}} = \frac{z_{n+1}\ z_{n-1}}{\sqrt[3]{n-1}}}$$

$$\cancel{\frac{z_{n-1}^2}{\sqrt[3]{n-1}} = \frac{z_n\ z_{n-2}}{\sqrt[3]{n-2}}}$$

$$\cancel{\frac{z_{n-2}^2}{\sqrt[3]{n-2}} = \frac{z_{n-1}\ z_{n-3}}{\sqrt[3]{n-3}}}$$

$\vdots$

$$\cancel{\frac{z_2^2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{z_3\ z_1}{\sqrt[3]{1}}}$$

$$\cancel{\frac{z^2}{\sqrt[3]{n}} = \frac{z^2 - dz^2}{\sqrt[3]{n-1}}}$$

$$\left(\frac{dz}{z}\right)^2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{n-1}{n}} = 1 - \left(1 - \frac{dn}{n}\right)^{1/3} = \frac{dn}{3n}$$

$$\cancel{\frac{dz}{z} = \sqrt{\frac{dn}{3n}}}$$

$$\cancel{\lg z = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\cancel{\frac{z_n z_1}{\sqrt[3]{n}} = z_{n+1}\, A_1}$$

$$\cancel{z_{n+1} = \frac{z_n}{\sqrt[3]{n}}\frac{z_1}{z_1}}$$

$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\nu_{n+1} = \nu_n \frac{\nu_1}{V} \frac{n^{2/3}}{(n+1)}\left[8\pi r^2\delta\beta + 4\pi r(\delta\beta)^2 + 2\pi(\delta\beta)^3\right]\alpha^{2/3} \neq \nu_n \frac{\nu_1}{V}\frac{A}{\sqrt[3]{n}}$$

$e^{2h\chi}$

$$\nu_n = \left(\frac{\nu_1}{V}\right)^n \frac{A^n}{\sqrt[3]{n!}} \neq \left(\frac{\nu_1}{V}\right)^n A^n \left(\frac{e}{n}\right)^{n/3} = \left[\frac{\nu_1}{V} A \left(\frac{e}{n}\right)^{1/3}\right]^n$$

~~Maximum wo~~ $\cancel{\frac{\nu_1}{V} A\left(\frac{e}{n}\right)^{1/3} = 1}$

~~hinsichtlich n~~

$$\cancel{n = \left[\frac{\nu_1}{V} A\right]^3 e}$$

~~also bei gegebenem $\frac{\nu_1}{V}$ werden desto grössere n auftreten, je grösser A, also je niedriger T~~

$$\cancel{A = \ldots = 8\pi r^2 \delta\beta \left[1 + \frac{\delta\beta}{2r} + \left(\frac{\delta\beta}{2r}\right)^2\right]}$$

~~Derjenige Wert, welcher der maximalen Dichte ν_n entspricht, soll N bezeichnet werden~~

~~also~~ $\cancel{N^{1/3} = \frac{\nu_1}{V} A\, e^{1/3}}$ $n = \frac{N}{1+E} \neq N(1-\varepsilon)$

$$\cancel{\nu_n = \left(\frac{N}{n}\right)^{n/3} = (1+E)^{N/3} = e^{\frac{NE}{3}} = e^{\frac{N-n}{3}}}$$

$n^{1/3}$ ist proportional dem Klumpendurchmesser $2R$

$$\therefore \quad v_n = \left(\frac{B}{R}\right)^{aR^3} = \cancel{\frac{v_1}{V} A e^{1/3}}$$

Maximum von v_n: $$\frac{dv_n}{dn} = -\left[\frac{v_1}{V} A \left(\frac{e}{n}\right)^{1/3}\right]^n \underbrace{\left[\log \frac{v_1}{V} A + 1/3 - 1/3 \log n\right]}_{=0} \frac{v_1}{V} A \frac{e^{1/3}}{3 n^{4/3}} = 0$$

~~das wirklich wie vorher gesetzt wird~~

~~Maximum für~~ $\frac{v_1}{V} A \left(\frac{e}{n}\right)^{1/3} = 1$

$$\log v_n = n\left\{\log\left[\frac{v_1}{V} A e^{1/3}\right] - 1/3 \log n\right\}$$

$$\frac{1}{v_n}\frac{dv_n}{dn} = \log\left[\frac{v_1}{V} A\right] + \cancel{\tfrac{1}{3}} - \frac{1}{3}\log n - \cancel{\tfrac{1}{3}} = 0 \quad \therefore \quad N_{(max)} = \left[\frac{v_1}{V} A\right]^3$$

$$n = N(1+\varepsilon)$$

$$\therefore \cancel{v_n = N e^{1/3}} \quad \log v_n = N(1+\varepsilon)\left\{\frac{1}{3}\log N + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log n\right\}$$

$$= \frac{N}{3}(1+\varepsilon)\left\{1 - \log\frac{n}{N}\right\} = \frac{N}{3}(1+\varepsilon)\left\{1-\log(1+\varepsilon)\right\}$$

$$= \frac{N}{3}(1+\varepsilon)\left\{1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\right\}\cdots$$

$$= \frac{N}{3}\begin{pmatrix}1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\\ +\varepsilon-\varepsilon^2\end{pmatrix} = \frac{N}{3}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

$$v_n = e^{\frac{N}{3}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)}$$

$$= e^{\frac{N}{3} - \frac{1}{6}\frac{(n-N)^2}{N}}$$

also im Falle großen N recht scharfes Maximum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_n \, d\varepsilon = e^{\frac{N}{3}} \sqrt{\frac{6\pi}{N}}$$

Die ganze obige Behandlung ist prinzipiell unrichtig, denn bei jenen Kolloiden ~~Konstanten~~ ~~dort~~ treten die einzelnen Schwefelkügelchen als eigene Moleküle auf und es kommt deren Vereinigung zu Doppelmolekülen etc. gar nicht in Betracht, nur die allgemeine Koagulation und Niederschlag-Bildung.

Vielleicht so, (mit Modifizierung der Boltzmannschen Dampfdruck-Ableitung Gastheorie II 167):

Koagulum

Es werde ein neutrales Teilchen hineingesetzt; Wahrsch. dass es in dem Raum sich aufhält : Wahrsch., dass es in der Koagulations-Schichte ist =

$$W_g : W_k = V : F\delta \qquad \text{falls keine Kräfte}$$

$$= V : F\delta\, e^{+2h\psi} \qquad \text{falls Arbeit } \psi$$

um das Teil vom Koagulum abzulösen

Falls also mehrere Teilchen in der Art eingesetzt werden, werden sie sich nach diesem Verhältnis auf den Raum und auf Koagulum verteilen, also

$$W_g : W_k = \frac{1}{v_g} : \frac{1}{v_k}$$

pro Vol. und Flächeneinheit

$$v_k : v_g = 1 : f\delta \cdot e^{+2h\psi} = 1 :$$

$$v_g = v_k f\delta\, e^{+2h\psi}$$

$$n_g = n_k \frac{e^{-2h\psi}}{f\delta} = \frac{n_k}{f\delta} \cdot e^{-\frac{N\psi}{HT}}$$

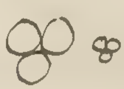
Falls diese Argumentation richtig ist, muss sie sich auch auf Häm. anwenden lassen!

$$n_g = \frac{n_k}{f\delta} \cdot e^{-\frac{N\psi}{H(273+t)}} \neq \frac{n_k}{f\delta} \cdot e^{-\frac{N\psi}{H\cdot 273}\left[1-\frac{t}{273}\right]}$$

$$= e^{kt-\beta} = e^{k(t-t_0)}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{N\psi}{H}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)} = e^{-\frac{N\psi \cdot \Delta T}{HT^2}}$$

Grösse des ψ: proportional der Anzahl der Berührungspunkte, oder der Oberfläche?

Extrem Fälle  

Jedenfalls wächst ψ mit Teilchenradius; also für grössere Teilchen viel kleineres n,

$$\lg\left(\frac{n_k}{f\delta}\right) - \frac{N\psi}{H\cdot T} = -k\, t_0 \qquad \frac{N\psi}{HT^2} = k \qquad t_0 = T - \frac{HT^2}{N\psi}\lg\left(\frac{n_k}{f\delta}\right)$$

$$= -\frac{N\psi}{HT^2}\, t_0$$

$$\lg\left(\frac{n_g}{n_k}\right) = -\lg(f\delta) - \frac{N\psi}{HT} \qquad f\delta = \frac{n_k}{n_g} \cdot e^{-\frac{N\psi}{HT}} = \frac{n_k}{n_g} e^{\frac{T}{t_0}\lg\frac{n_1}{n_2}}$$

$$\lg\left(\frac{n_k}{f\delta}\right) = \frac{N\psi}{HT}\left(1-\frac{t_0}{T}\right)$$

Danach wäre: $f\delta \neq e^{-300} = 10^{-130}$!!

Am Besten genau nach Boltzmann:

Arbeit ψ um ein Teilchen aus Kugelchen heraus in den Raum zu schaffen

Dann ist gesammte Trennungsarbeit von n_k Teilchen $= \frac{n\psi}{2}$

Sodann folgt in genau analoger Weise:

$$\cancel{v_g - 2b + \frac{17}{16}\frac{b^2}{v_g} = \left[v_k - 2b + \frac{17}{16}\frac{b^2}{v_k}\right] e^{2h\psi}}$$

Nicht wahr, denn im Kugelchen-Raum sind nicht alle Volumteile gleich anteilig, das gilt nur für Van der Waal'sche Kräfte

also falls $\frac{\text{= const}}{k}$ angesehen wird, (annähernd $= v_k$?)

wenigstens solcher Grössenordnung

$$\cancel{v_g = K e^{2h\psi}}$$

$$\cancel{= K e^{\frac{N}{HT}\psi}}$$

$$\cancel{n_g = a e^{-\frac{N}{HT}\psi} \neq n_k e^{-\frac{N}{HT}\psi}}$$

Sonst Odén:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{22{\cdot}23}{1{\cdot}53} = e^{\frac{N\psi \cdot 2{\cdot}6}{H\,(289{\cdot}7)^2}} \qquad \psi = \frac{H}{N}\frac{(289{\cdot}7)^2}{2{\cdot}6}\,\lg \frac{22{\cdot}23}{1{\cdot}53}$$

3470
1847
1'1623 . 2·3
2·3246
3487
2·673

$$\psi = \cancel{\frac{6{\cdot}2.10^{23}}{8{\cdot}3.10^{7}}} \quad \frac{8{\cdot}3.10^{7}}{6{\cdot}2.10^{23}}\;\frac{(290)^2}{2{\cdot}6}\;2{\cdot}67 =$$

= 9248 / 4265 / 9191 / 2704 / 2074 / 0630 — 7924 / 4150 / 2074

$$\psi = 1{\cdot}16.10^{-11}$$

Kapillararbeit bei Oberflächenbildung $80.\; d^2\pi = 1.10^{-11}$

$$d = \sqrt{\frac{10^{-11}}{250}} = \sqrt{4.10^{-14}} = 2.10^{-7} = 2\mu\mu$$

$$\frac{N\psi}{HT} = \frac{290}{2{\cdot}6}\,2{\cdot}67 = +300$$

Fall einfach Clapeyron's Gleichung angewendet

Vollständige Zerteilungswärme $r = T \frac{dp}{dT} v_g$ (pro gr.)

$$p\varphi = \frac{c^2}{3} = RT = \frac{HT}{\mu} = \frac{HT}{mN}$$

$$p = \frac{n m c^2}{3}$$

$$= e^{k(t-t_0)} \cdot \frac{mc^2}{3} \qquad \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = k + \cancel{\frac{x}{T}}$$

$$\lg p = k(t-t_0) + \lg \overbrace{\frac{mc^2}{3}}^{= \lg T + \cdots}$$

$$r = T p v_g k = T \overbrace{n\frac{mc^2}{3}}^{\rho} v_g k = T\frac{c^2}{3}k = \frac{HT^2}{mN}k$$

Nach unserer kinetischen Ableitung war dagegen:

$$\frac{N\psi}{HT^2} = k \qquad r = \frac{\psi}{m} = \frac{k}{m}\frac{HT^2}{N} \qquad \text{stimmt}$$

$$m = \frac{[0.265\mu]^3\pi}{6}\cdot 2 = \frac{(0.265)^3\pi}{3}\cdot 10^{-12} = \frac{2.8.\cancel{3}}{\cancel{3}}.(2.6.2.7).10^{-15} = 3.\,2.6.\,2.5.\,10^{-15}$$

$$= 2.10^{-14}$$

$$\therefore r = \frac{1.10^{-11}}{2.10^{-14}} = 500 \quad \left(\frac{\text{Erg}}{1\,\text{gr.}}\right)$$

Nun wäre aber die bloße Schwerkraftsarbeit bei Hebung eines 1 gr. um 1 cm: $A = \frac{980}{2} \neq 500$

Schwefel in Wasser

Andererseits bei Auflösung von S löst sich ungefähr Null

und zwar pro 1 gr S: 0.0278 gr NaCl $\frac{35.5}{23}$

dabei wird Wärmemenge: $\frac{0.0278}{58.5}\cdot 1.3$ (gcal) ~~gebunden~~ verbraucht wird.

$$= \frac{2.78\cdot 1.3}{0.585}\cdot 10^{-4} = 6.10^{-4}\,\text{gcal} = 6.4.2.10^{3} = 24\,000\ \text{Erg}$$

Kapillararbeit bei Bildung:

$$\frac{(0.265)^2\pi.10^{-8}.80}{\frac{(0.265)^3\pi.10^{-12}}{3}.2} = \frac{3.10^4.80}{0.265} = 10^7\ \text{Erg}$$

Kapillarröhren: Volumdifferenz [illegible] Rückwirkung d. Elektroosmot. Strömung?

Ersatz erfolgt: $1 : 1 + \left(\frac{K(\varphi_1-\varphi_2)}{4\pi}\right)^2 \frac{\sigma}{a^2\mu}$

$\sigma = 10^{-8}$ $\qquad K(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{4}{300}$ $\qquad \frac{\cancel{4}\cdot 4\cdot 8}{9\cdot 10^4\cdot 9}\,\frac{10^{-8}}{\cancel{4}\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-2}} = 10^{-6}$!

$a = 2\cdot 10^{-2}$ $\qquad\qquad$ unmerklich

$\mu = 0{\cdot}01$

$$E = \frac{\Delta K\varphi}{4\pi}\cdot\frac{P\sigma}{\mu} \qquad M = \frac{E}{\mu L}R^2\cdot\frac{\Delta K\varphi}{4\pi} = \left(\frac{\Delta K\varphi}{4\pi}\right)^2\frac{P\sigma}{\mu^2}\frac{R^2}{L}$$

$$V = \frac{P R^4\pi}{8\mu L}$$

$$\frac{M}{V} = \left(\frac{\Delta K\varphi}{4\pi}\right)^2\frac{8\sigma}{\pi\mu R^2}$$

Im Falle gewöhnlichen ~~[illegible]~~ Gleichgewichts

$$n_z = n_0 e^{-\frac{gz}{RT}} = n_0 e^{-\frac{gzNm}{HT}\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)} \qquad Nm\,g z = 2\cdot 10^{-14}\cdot 10^{3} = 2\cdot 10^{-11} = 2\psi$$

Es würde also auch φ merklich von der gleichen Größenordnung sein. Doch wäre n_z ganz verschwindend [illegible]

Revision der früheren Rechnung:

$$v_x : v_g = 1 : f\int_0^{\delta} e^{2h\chi}\,d\delta = 1 : f\int_0 \underbrace{e^{\frac{N}{HT}\chi}\,d\delta}$$ falls χ konstant wäre dies $= f\delta\cdot e^{\frac{N}{HT}\varphi}$

~~[illegible]~~

das wäre also unter Voraussetzung, dass Kraft von Berührung der ungefähr Molekülschichten an unverändert [illegible]

Wahrscheinlicher wäre wohl andere Voraussetzung z.B. ~~[illegible]~~ $\chi = \frac{a}{\delta}$ aber dann wird $\varphi = \infty$

Also zeigt sich dass, falls $\int e^{2h\chi}\,d\delta = \delta e^{2h\varphi}$ gesetzt wird, dass φ noch Temperaturfunction sein wird

Zur Koagulations-Formel:

In den ersten Stadien koagulieren Teilchen von wenig verschiedener Grösse, wo angenähert

$$D_{ik} R_{ik} = (D_i + D_k)\,\frac{R_i + R_k}{2}$$

gilt kann tatsächlich gesetzt werden

$$D_i = \frac{DR}{R_i}$$

$$(D_i + D_k)\frac{(R_i+R_k)}{2} = \frac{DR}{2}(R_i+R_k)\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_k}\right) = \frac{DR}{2}\,\frac{(R_i+R_k)^2}{R_i R_k}$$

$$\beta = 2\pi\nu_0 D_{11} R_{11} = 4\pi\nu_0 DR$$

aber in späteren Stadien (dauernd erfolgt auch Koagulation sehr ungleich grosser Teilchen)

falls n sehr gross und (dichte Lagerung ein) Kugelgestalt

$$D_{nn} R_{nn} = 2 D_n R_n . \qquad D \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \qquad R_n \sim \sqrt[3]{n}$$

Somit wäre $= 2DR$

aber im Fall sehr ungleicher Teilchen i klein k gross

$$D_{ik} R_{ik} = D_i R_k = \underbrace{DR\sqrt[3]{\frac{k}{i}}}_{\text{wäre dies vergrössert!}}$$

Falls aber lockere Lagerung entsteht sind nicht alle Punkte der Kugel R als empfindlich zu betrachten (?)

Reibungs-Einfluss $\mu = \mu_0(1+\frac{5}{2}\Sigma\varphi)$

I. Annahme: alle Teilchen im selben Masse aufgelockert $(1+\alpha)$ mit Ausnahme der einfachen

$$\Sigma\varphi = \cancel{\omega \sum' \frac{\nu}{n}\boxed{1+\alpha n}}$$

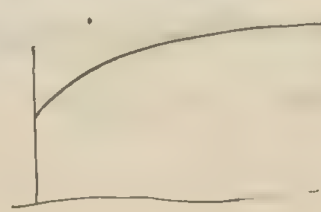
$$= \omega\left[\nu_1 + \sum_2^\infty n\nu_n(1+\alpha)\right] = \omega\,\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\left[1+(1+\alpha)\sum\left\{\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} + 3\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + \cdots\right\}\right]$$

$$\Phi = \omega\nu_0\left[(1+\alpha) - \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^2}\right] = \omega\nu_0\left\{1 + \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^2}(2\varepsilon+\varepsilon^2)\right\}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} = +\frac{2}{(1+\varepsilon)^3}\,\omega\alpha$$

Kein Wendepunkt

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon^2} = -\frac{6}{(1+\varepsilon)^4}\,\omega\alpha$$



Dabei jedoch Giltigkeit d. Einstein-Formel vorausgesetzt, während in Wirkl. bei ... Werten, wo φ erhebliche Werte besitzt ein stärkerer Abhängigkeit stattfindet

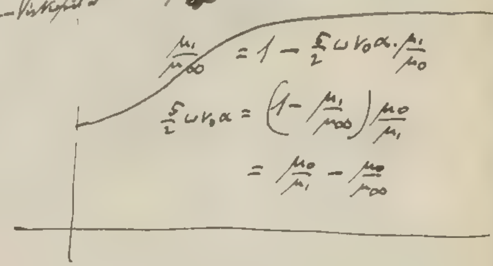
$$\frac{1}{1-\frac{5}{2}\omega\nu_0} = \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\text{Anfangs-Viskosität}}{\text{Assoz.-Viskosität}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{5}{2}\omega\nu_0(1+\alpha)} = \frac{\mu_\infty}{\mu_0}$$

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = 1 - \frac{\frac{5}{2}\omega\nu_0\alpha}{1-\frac{5}{2}\omega\nu_0}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_\infty} = 1 - \frac{5}{2}\omega\nu_0\alpha\cdot\frac{\mu_1}{\mu_0}$$

$$\frac{5}{2}\omega\nu_0\alpha = \left(1-\frac{\mu_1}{\mu_\infty}\right)\frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\mu_0}{\mu_1} - \frac{\mu_0}{\mu_\infty}$$



$$\mu = \frac{\mu_0}{1-\frac{5}{2}\Sigma\varphi}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1-\frac{5}{2}\omega\nu_0\left[(1+\alpha)-\frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^2}\right]}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} = +\frac{1}{\{\quad\}^2}\,\frac{5\omega\alpha}{(1+\varepsilon)^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} = +\frac{2}{\{\quad\}^3}\,\frac{25\omega^2\alpha^2}{(1+\varepsilon)^6} - \frac{1}{\{\quad\}^2}\,\frac{15\omega\alpha}{(1+\varepsilon)^4} = 0$$

$$\frac{10\,\omega\alpha}{1-\frac{5}{2}\omega\left[(1+\alpha)-\frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^2}\right]}\;\bigg|\;\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 3$$

$$\cancel{10\frac{\omega\alpha\cdot\mu}{\mu_0} = 3(1+\varepsilon)^2}$$

$$\cancel{\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{3(1+\varepsilon)^2}{10\,\alpha\,\omega}}$$

$$\cancel{\varepsilon = -1+\sqrt{\frac{10}{3}\omega\alpha\frac{\mu}{\mu_0}}}$$

$$\cancel{\mu = \frac{\mu_0}{1-\sqrt[3]{\varphi}}}$$

$$\cancel{\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon} = \frac{+1}{(1-\sqrt[3]{\varphi})^2}\,\frac{1}{\varphi^{2/3}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}}$$

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial\varepsilon^2} = \frac{2}{(1-\sqrt[3]{\varphi})^3}\,\frac{1}{\varphi^{4/3}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{5\omega\alpha\nu_0}{1-\frac{5\omega\nu_0}{2}} = 2\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_\infty}\right)$$

$$\frac{10\,\omega\alpha}{\left[1-\frac{5\omega}{2}(1+\alpha)\right](1+\varepsilon)^2+\frac{5\omega\alpha}{2}} = 3$$

$$\underbrace{\left(10-\frac{15}{2}\right)}_{\frac{5}{2}}\omega\alpha = 3(1+\varepsilon)^2\left[1-\frac{5\omega}{2}(1+\alpha)\right]$$

$$(1+\varepsilon)^2 = \frac{5}{6}\,\frac{\omega\alpha\nu_0}{1-\frac{5\omega}{2}(1+\alpha)\nu_0}$$

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_{\omega} = \frac{1}{1-\frac{5}{2}\omega[1+\alpha]+\frac{6\left[1-\frac{5\omega}{2}(1+\alpha)\right]}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\left[1-\frac{5}{2}\omega(1+\alpha)\right]} = \frac{1}{4}\frac{\mu_\infty}{\mu_0}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\omega} = \frac{5\omega\alpha\,\cancel{\left[1-\frac{5\omega}{2}(1+\alpha)\right]^{3/2}}}{\frac{5}{6}\omega\alpha^{1/2}\cdot 16\left[1-\frac{5}{2}\ldots\right]^2} = \frac{3}{8}\,\frac{1}{1-\frac{5\omega}{2}(1+\alpha)}$$

Wenn wir meine empirische Formel verwenden:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\left[1-\Phi-\frac{3}{2}\Phi^{5/3}\right]^{5/2}}$$ und einsetzen

$$\mu_{c=0} = \mu_1 = \frac{\mu_0}{\left[1-(\omega V_0)-\frac{3}{2}(\omega V_0)^{5/3}\right]^{5/2}}$$ so ergibt sich daraus (ωV_0)

Weiter aus $$\mu_\infty = \frac{\mu_0}{\left[1-(\omega V_0)(1+\alpha)-\frac{3}{2}\left[(\omega V_0)(1+\alpha)\right]^{5/3}\right]^{5/2}}$$ folgt α

Füllung mit K-Salicylat

$\mu_0 = 49$

$\mu_1 = 52$

$\mu_\infty = 100.3$

$$\omega V_0 \neq \frac{3}{49}\cdot\frac{2}{5} = 0.025$$

$$1-\beta-\frac{3}{2}\beta^{5/3} = \left(\frac{49}{100.3}\right)^{2/5} = 0.7510$$

0.2440

$-\frac{6902}{12}$, $46890-5$, $0.9378 \cdot 2 - 1$, $0.8756 \; -1$

$\frac{49}{52}$: 6902, 7160, $49742-5$, 0.9948, 0.9896, 0.9766, 0.0234

$$\beta\left[1+\frac{3}{2}\beta^{2/3}\right] = 0.2440$$

$\beta = 0.180$ | $2.2553-3$, 0.75177, $1.5035-2$

$\beta^{2/3} = 0.3188$, 1594, $1.4782 \cdot 1.8$, 11826, 2.660

$\beta = 0.17$ || $22304-3$, 0.74347, $0.4869 -1$

$\beta^{2/3} = 0.3068$, 1534, $1.4602 \cdot 1.7$, 10221, 2.482, 2.440, 42, 178 $\cdot \frac{=62}{24}$

0.170, $\frac{24}{\beta = 0.1676}$

$\beta = 0.02$: $1.3010-3$, $0.4337-1$, 0.8674, 0.0737, 368, $1.1105 \cdot 2$, 0.0222

$\beta = 0.022$: $1.3424-3$, $0.4475-1$, $0.8950-2$, 0.0785, 392, 1.1177, 2235, 2235, 0.02459, 19, $239 \cdot 2$

$\frac{38}{4} = \frac{19}{12} = 1.6$

$\beta = 0.02184$

$\omega v_0 = 0.02184$

$\omega v_0(1+\alpha) = 0.1676$

218

$\omega v_0 \alpha = 0.1458$

$\alpha = \frac{0.1458}{0.02184} \doteq 7$

$\Phi = 0.1$ $\quad -5/3 = -1.6667$

0.3333 −2

9

0.02154

1077

0.1 3231

0.8677

0.9384 −1

0.0616 .5/2

308

0.1540

6902

0.8442

$\mu = 69.85$

58.0

$\Delta\mu = 11.85$

$(1+\varepsilon)^2 = \frac{0.1458}{0.0676}$

1638

8299

3339

1670

1.468

$\Phi = 0.06$

1.7782 −3

0.59273 −1

0.96365 −3

0.06920

0.93080

9669

0.0311 .5

.1555

0.0777

6902

0.7679

460

0.0738

0.9262

9664

0333.5

1665

08325

6902

0.77345

$\mu = 58.6$

$\boxed{\Delta\mu = 6.6}$

59.35

52.

$\Delta\mu = 7.35$

$\Phi = 0.06 = 0.1676 - \frac{0.1458}{(1+\varepsilon)^2}$

$(1+\varepsilon)^2 = \frac{0.1458}{0.1676 - 0.060} = \frac{0.1458}{0.1076}$

1638

−0317

1321

06605

$\doteq 1.3556$

$1+\varepsilon = 1.164_3$

$\frac{\varepsilon}{t} = 0.164_3$

2456

0628

8784

8573

0211

$t = 4.6$

$\varepsilon = \frac{0.1643}{7.2} \cdot 4.6 = 0.105$

$(1+\varepsilon)^2 = 1.105$

1105

55

1221

$\boxed{\Phi = 0.0482}$

1638

0807

0771

0.1676

− 1194

0.0482

56.85

52.0

$\boxed{\Delta\mu = 4.85}$

1.6830 −3

0.5610 −1

0.8050 −3

0258

0129.5

0645

6902

7547

0.006383

3191

0.009574

482

0.05777

0.94223

9742

$\Phi = 0{\cdot}08$

9·5155 −15
1·9031 −3
~~0·6344~~
3·1718 −5

0·01485
742
0·10227
~~0·91777~~ 0·89773

9531
0469
·2345
11725
6902
0·80745

$\mu = 64{\cdot}2$
52
$\Delta\mu = 12{\cdot}2$

0·03726
1869
0·09315
6902
0·7873

7·3
11·2
12·2
17·8

$\Phi = 0{\cdot}076$

1·8808 −3
9·4040
3·13467 −5

0·013636
6818
76
0·09645
0·90355

9557
3
9560
0440
220
1100
6902
0·8002

$\mu = 63{\cdot}13$
52·
$\Delta\mu = 11{\cdot}13$

11·13
7
11·20
12·2

76 26
80

$\frac{7}{107}\cdot 4 = \frac{28}{107}$
66

Also für $\Delta\mu = 11{\cdot}2$

$\Phi = 0{\cdot}07626$
1676
0·09134

1638
− 9607
2031
10155
11·5

$(1+\varepsilon)^2 = \frac{1458}{913{\cdot}4}$

$= 1{\cdot}596$

12634

$\varepsilon = 0{\cdot}2634$

$t = 7{\cdot}9$

4207
−8976
5231
+ 4472
9703

$t = 2{\cdot}8 \qquad \varepsilon = 0{\cdot}0934$

$\Phi_c =$

$1{\cdot}0579 - 3$
$0{\cdot}5533 - 1$
$0{\cdot}7665 - 3$

10934 0388 0776

$1638 - 0776 = 0862$

$0{\cdot}1676 - \frac{0{\cdot}1458}{(1{\cdot}0934)^2}$

0·005841
2920
457
0·05446
0·94554

1676
1219

$\Phi = 0{\cdot}0457$

9757
0·0243
1215
·06075
6902
0·75095

	0·02184	0·00	$\varepsilon =$
$\Phi =$	0·0457	$\Delta\mu = 4{\cdot}35$	0·0934
	0·06	7·35	0·1643
	0·07626	11·2	0·2634
	0·08	12·2	
	0·10	17·85	0·468
		25·0	
		48·3	

$\mu = 56{\cdot}35$
$52{\cdot}$
$\Delta\mu = 4{\cdot}35$


1 B.


3 Berührungspunkte


6 B.

Andere Annäherung ~~[illegible]~~ welche in letzter Stelle dem erfolgten Wachstum Rechnung trägt

$$\Sigma\varphi = \omega\left[\nu_1 + 2\nu_2 + n\right.$$

$$= \omega\left[\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_2\frac{\alpha}{3} + 3\nu_3 + \alpha\nu_3 + 4\nu_4 + 2\alpha\nu_4 + 5\nu_5 + 3\alpha\nu_5 + \dots\right.$$

$$= \omega\left[\underbrace{\sum n\nu_n}_{\nu_0} + \alpha\left\{\frac{\nu_2}{3} + \sum_1^\infty n\,\nu_{n+2}\right\}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\nu_{n+2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\left[\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3 + 3\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4 + \dots\right] = \cancel{\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3}\left[\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + 2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right.}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^4}\left[1 + 2\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + 3\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}^2\right] = \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^4}(1+\varepsilon)^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Phi = \omega\nu_0\left[1 + \alpha\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} + \left(\frac{\alpha}{3}\,\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3}\right)\right] \qquad = \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2} = (1+\varepsilon)^2$$

Hohlraum bildet sich von $n = 4$ anfang.

Also?

$$\Phi = \omega v_0 + \omega v_0 \alpha \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\, v_{n+3}}$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\left[\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3 + 2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4 + 3\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^5 + \cdots\right]$$

$$\frac{\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)^5}\left[\underbrace{1 + 2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + 3\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} + \cdots}_{(1+\varepsilon)^2}\right] = \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3$$

$$\Phi = \omega v_0 + \omega v_0 \alpha \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3$$

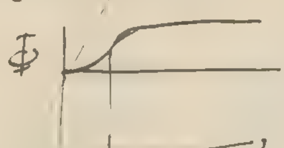
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = 3\omega v_0 \alpha \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 \left[\underbrace{-\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{1}{1+\varepsilon}}\right]$$

$$= 3\omega v_0 \alpha \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^4}$$

Wenn man bedenkt dass die Grösse der ~~Hohlräume~~ Hohlräume zunimmt

$$\Phi = \omega v_0 + \omega v_0 \alpha \frac{\varepsilon^3}{(1+\varepsilon)^5}\left[1 + 2\alpha \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + 3\alpha^2 +\right.$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^4} - 4\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^5} = 0$$



$$\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1$$

$\varepsilon = 1$
Wendepunkt

Unter Annahme:

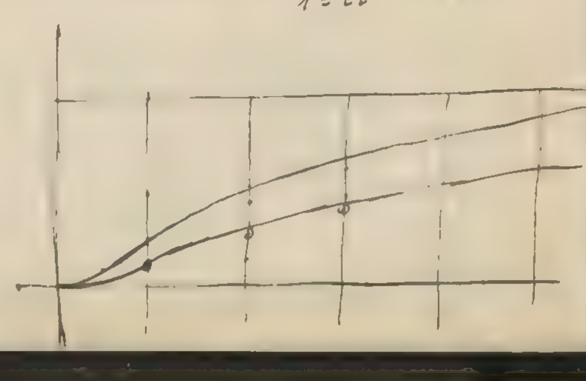
$$\Phi = \omega v_0 + \omega v_0 \alpha \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^3} = 2\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = +\frac{1}{(1+\varepsilon)^3} - \frac{3\varepsilon}{(1+\varepsilon)^4} = 0$$

$1 = 2\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{1}{2}$

	I	II	III
$\frac{\Phi - \omega v_0}{\omega v_0 \alpha} =$	$\cancel{\frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}}$	$\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}$	$\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3$
0.164 =	$\varepsilon =$ .093	0.68	1.21
0.373 =	0.203	1.57	2.57
Wendepunkte für	X	$\varepsilon = \frac{1}{2}$	$\varepsilon = 1$



Versuch: $\Phi = \omega \left[v_1 + 2v_2 + v_2\alpha + 3v_3 + 2v_3\alpha + \cdots \right]$

$$= \omega v_0 + \frac{\omega v_0 \alpha}{(1+\varepsilon)^2}\left[\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + 2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \omega v_0 \left[1 + \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^3}\,\varepsilon\,(1+\varepsilon)^2\right] = \omega v_0 \left[1 + \frac{\alpha\varepsilon}{1+\varepsilon}\right]$$

$\rho = 0.12$

$2.0792 - 3$

$0.69307 - 4$

$0.46535 - 2$

0.0292
146
12
0.1638

0.8362

$\rho\ 223$
0.0777
0.3885
0.1942
6902
0.8844

$69.85 \qquad \rho = 10$

$\mu = 76.63 \qquad 12$

$\mu = 77.\frac{77}{678} \qquad \rho = 12.2$

$$\left.\begin{aligned} \omega v_0 &= 0.02184 \\ \omega v_0 (1+\alpha) &= 0.122 \\ \omega v_0 \alpha &= 0.100 \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \frac{100}{218}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^3} = 2\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2} \quad = 2\left[\frac{1}{(1+\varepsilon)^3} - \frac{3\varepsilon}{(1+\varepsilon)^4}\right] = 0 \qquad \frac{3\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1 \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2+2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{2(2\varepsilon+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^3} = 2\,\frac{(1+\varepsilon)^2 - (2\varepsilon+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^3} = \frac{2}{(1+\varepsilon)^3}$$

~~[illegible] Klumpen~~

$$\Phi = v_1 + \left(2v_2 + \frac{v_2\alpha}{3}\right) + v_3(3+\alpha) + v_4(4 + 2\alpha$$

Alles das ist einstweilen vollständig haltlos, wie insbesondere aus dem Zahlenwert $\alpha = 5$ bis 7 hervorgeht welcher nötig wäre um Freundlich's Resultate zu erklären d.h. der Raum der für jedes an den Klumpen neu anklebendes Teilchen dazukommt, wäre 5 bis 7 mal grösser als das Eigenvolumen des Teilchens. Das ist bei kugelförmigen Teilchen nicht denkbar. Es müssten also Nadeln oder [illegible] sein und α [illegible] ist diese Rechnungsweise nicht zu verwenden.

Wünschenswert wären analoge Messungen an V-Solen oder Gummigutt etc.

Falls Wasser, welches eine grosse Anzahl Kolloid-Teilchen enthält, durch ~~[illegible]~~ ein poröses Filter hindurchgepresst wird, (mit konstanter Geschw.) entsteht Verteilung analog wie beim Schwere-Sedimentation wirkt. ~~[illegible]~~ Geschw. c entspricht der Fallgeschw. $\frac{c}{1}$, also Endverteilung:

$$W(x)\,dx = \frac{c}{D}\, e^{-\frac{cx}{D}}\, dx$$

Es könnte z.B. in vertikaler Richtung ein aufsteigender Flüssigkeitsstrom wirken, welcher die Fallgeschwindigkeit teilweise aufhebt. Dann gilt

$$W(x)\,dx = \frac{C-c}{D}\, e^{-\frac{C-c}{D}x}\, dx$$

Offenbar gibt das eine Methode zur fractionierten Sedimentation, durch welche alle Teilchen von $C < c$ entfernt werden

z.B. für Gummigutt $\delta = 1.2$, $a = \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{2}10^{-4}$

$$C = 0.2 \cdot \frac{2}{9}\frac{a^2 g}{\mu} = 0.2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-8} \cdot 10^{3}}{0.01} = \frac{10^{-4}}{9} \neq 10^{-5} \frac{cm}{sek.}$$

für sehr feine nicht anwendbar wegen Zugzeit

[wohl aber auf Zentrifuge]

Ebenso falls z.B. etwas lufthaltiger Wasserdampf an einer kalten Wand kondensiert:

Strömungsgeschw. d. H_2O Dampfes in grösserer Entfernung gegen die Wand zu $= c$

Dichte Verteilung der Luft an der Wand:

$$\rho = \frac{c}{D}\, e^{-\frac{cx}{D}}$$ wobei D = Diff Konst. der Luft in H_2O Dampf

(falls $\frac{c}{D}$ kommensurabel mit H_2O Dichte))

~~Die Wand~~ Das wird aber nicht genau gelten, da hier eine Rückwirkung auf die Verteilung d. H_2O Dampfes (wegen dessen Ausdehnbarkeit)

Dagegen z.B. ~~Krystallisation von NaCl aus übersättigter Lösung~~ (unterkühlte Flüssigkeit incl. d. Fortschreiten ?)

Eisbildung, falls Wasser verunreinigt durch Fremdstoff

c = lineare Wachstumsgeschw.; Konz. d. Fremdstoffs an der Eisgrenze $= \frac{c}{D} \cdot \varphi$; Falls z.B. Zucker, so bedeutet dies entsprechende Gefrierpunktserniedrigung

Energie $\overline{}^2$

~~[illegible]~~ Temperatur Schwankungen, Geschwindigkeit derselben

Dieselbe Formel, welche für Diffusions Schwankungen bewiesen wurde:

$\overline{\Delta^2} = 2\nu P$ muss auch für Temperaturschwankungen gelten

$\overline{\Delta^2} = 2P\,\overline{\delta^2}$

Energieschwankungen (H A Lorentz p. 41): $\overline{\varepsilon^2} = \dfrac{ckT^2}{2}$ c = Wärmekapazität

(c)—(c)

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{kT^2}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}}$$ (c_1)—(c_2)

Im Falle, dass c_2 sehr gross ist: $\overline{\varepsilon^2} = ckT^2 = c\,m\,\frac{H}{N}\,T^2$

$$\left(\frac{\overline{\varepsilon^2}}{E}\right)^2 = \frac{k}{C} = \frac{H}{N}\,\frac{1}{cm} = \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2$$

Also wäre

$$\frac{\overline{\Delta_{zeit} E}^2}{E^2} = \frac{2k}{c}\,P$$

Im Falle einer Platte oder eines Drahtes:

P

$$\lim_{t=\infty} P = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

$$\lim \overline{\Delta E^2} = \frac{c\,\cancel{q}\,h\rho\,kT^2}{\cancel{\pi}}\,\frac{4}{\cancel{h}}\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

$$\left(\frac{\overline{\Delta E}}{E}\right)^2 = \frac{4H}{N\,c\,m\,h}\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

Chemische Schwankungsgeschwindigkeit?

$\overset{+}{\ominus}$ $\overset{+}{\circ}$ $\oplus\,2$

$\underline{\ominus}\,1$

Doppelschicht Theorie (analog Gouy)

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= n_{10}\, e^{-\frac{NU}{HT}\varepsilon} \\ n_2 &= n_{20}\, e^{+\frac{2NU}{HT}\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad -4\pi\varepsilon(n_1 - 2n_2) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$-4\pi\varepsilon\left[n_{10}\, e^{-hU} - 2 n_{20}\, e^{+2hU}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

~~Falls beides ähnlich Ionen:~~ $\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -4\pi\varepsilon\; n_{10} - n_{20}}$

$$\frac{4\pi\varepsilon}{h}\left[n_{10}\, e^{-hU} + n_{20}\, e^{2hU}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \text{const}$$

$$\frac{4\pi\varepsilon}{h}\left[n_{10} + n_{20}\right] = \text{const}$$

$$n_{10} = 2 n_{20}$$

$$e^{+hU} = z$$

$$\cancel{\alpha\left[\frac{1}{2} + \frac{z^2}{2}\right] =}$$

$$\cancel{hU = 2 \lg z}$$

Nullpunkt ins Innere der Flüssigkeit verlegt, wo Stromgesetz[?] verschwindet

$$\cancel{h\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}}$$

$$h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{2z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{\alpha\left(e^{-hU} - 1\right) + \frac{\alpha}{2}\left(e^{2hU} - 1\right)}} = \int dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{dU}{\sqrt{2e^{-hU} + e^{2hU} - 3}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \sqrt{\frac{e^{hU}}{2 - 3e^{hU} + e^{3hU}}}\, dU = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{e^{hU}\, dU}{\sqrt{2e^{hU} - 3e^{2hU} + e^{4hU}}}$$

$$x = \frac{1}{h\sqrt{\alpha}}\int \frac{dz}{\sqrt{2z - 3z^2 + z^4}} \qquad \alpha = \frac{8\pi\varepsilon}{h}\, n_{10}$$

$$z = 1 + \xi \qquad \sqrt{\cancel{\xi} + \cancel{2\xi} - \cancel{\xi} - \cancel{6\xi} - 3\xi^2 + \xi + \cancel{\xi} + 6\xi^2 + 4\xi^3 + \xi^4}$$

$$x = \frac{1}{h\sqrt{\alpha}}\int_{\xi=0} \frac{d\xi}{\sqrt{3\xi^2 + 4\xi^3 + \xi^4}} = \infty\,!$$

Natürlich denn Stromgesetz erst in ∞ Entfernung von Oberfläche

~~Beispiel~~ Annahme: positive einwertige } Ionen
negative mehrwertige (k)

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= n_{10}\, e^{-hU} \\ n_2 &= n_{20}\, e^{khU} \end{aligned}\right\} \qquad -4\pi\varepsilon\left[n_{10} e^{-hU} - k n_{20} e^{khU}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\frac{4\pi\varepsilon}{h}\left[n_{10} e^{-hU} + n_{20} e^{khU}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \text{const}$$

$$\ldots\left[n_{10} + n_{20}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2 + \text{const}$$

wenn das Potential an der Oberfläche $= 0$ angenommen wird $\Big\|$ $\frac{4\pi\varepsilon}{h}\left[n_{10}(e^{-hU}-1) + n_{20}(e^{khU}-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2\right]$.

$$\int_0 \frac{dU}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2}_{\cancel{\ }} + \alpha(e^{-hU}-1) + \beta(e^{khU}-1)}} = x \;\cancel{+\text{const}}$$

$\boxed{\alpha, \beta \text{ wesentlich positiv} \quad \text{dagegen } \gamma\,?}$

$$\int \frac{e^{hU}\, dU}{\sqrt{\alpha e^{hU} + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2 - \alpha - \beta\right]}_{\gamma} e^{2hU} + \beta e^{(k+2)hU}}} = x = \frac{1}{h}\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha z + \gamma z^2 + \beta z^{2+k}}}$$

für $x = \infty$ muss $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 = 0$ also: $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2 = \alpha\left(1 - e^{-hU_\infty}\right) + \beta\left(1 - e^{+hkU_\infty}\right)$

$$\therefore \quad \gamma = -\alpha e^{-hU_\infty} - \beta e^{+hkU_\infty}$$

Somit ist γ wesentlich negativ, somit wenn von nun an $-\gamma$ anstatt γ eingeführt wird:

$$x = \frac{1}{h}\int_1^{e^{hU}} \frac{dz}{\sqrt{\alpha z - \gamma z^2 + \beta z^{2+k}}}$$

dabei muss ~~...~~

$$\alpha e^{-hU_\infty} = k\beta e^{+khU_\infty}$$

Somit: ~~...~~

$$\gamma = \left[\frac{\alpha}{z_\infty} + \beta z_\infty^k\right]$$

$$\frac{\alpha}{z_\infty} = k\beta z_\infty^k \qquad \therefore \alpha = \underline{k\beta z_\infty^{1+k}}$$

$$\gamma = (k+1)\beta z_\infty^k = \frac{k+1}{k}\frac{\alpha}{z_\infty}$$

$$x = \frac{1}{k}\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha z - \frac{k+1}{k}\frac{\alpha}{z_\infty}z^2 + \frac{\alpha}{k}\frac{z^{2+k}}{z_\infty^{k+1}}}} = \frac{1}{h\sqrt{\alpha z_\infty}}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{z}{z_\infty} - \frac{k+1}{k}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{k+2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{z_\infty}}{h\sqrt{\alpha}}\int_{y=e^{-hU_\infty}} \frac{dy}{\sqrt{y - \frac{k+1}{k}y^2 + \frac{1}{k}y^{k+2}}} \qquad \boxed{y = \frac{z}{z_\infty} = e^{+h(U-U_\infty)}}$$

$$y = \frac{\alpha}{z_\infty}\frac{k+1}{k} = \alpha\left[1+\frac{1}{k}\frac{1}{z_\infty^{k+1}}\right] + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2 = \alpha\left[1 + \frac{1}{k}\frac{1}{z_\infty^{k+1}} + \frac{k+1}{k}\frac{1}{z_\infty}\right]$$

$$= \alpha\left\{1 + \frac{1}{z_\infty} + \frac{1}{k}\left[\frac{1}{z_\infty^{k+1}} - \frac{1}{z_\infty}\right]\right\}$$

$$= \alpha\left[1 + e^{-hU_\infty} + \frac{1}{k}\left[e^{-(k+1)hU_\infty} - e^{-hU_\infty}\right]\right]$$

Es sollte daher sein:

$$\infty = \frac{\sqrt{z_\infty}}{h\sqrt{\alpha}}\int_{y=e^{-hU_\infty}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{\cdots}}$$

$y = 1 - \varepsilon$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon - 1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{1}{k}\left[1 - (k+2)\varepsilon + \frac{(k+1)(k+2)}{2}\varepsilon^2 - \frac{(k+2)(k+1)k}{6}\varepsilon^3 - \right]}}$$

$$- \frac{1}{k}\left[1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2k} - 1 - \frac{1}{k}\right] - \frac{1}{k}\binom{k+2}{3}\varepsilon^3 - \quad}} \qquad = \int_{\varepsilon}^{0} \frac{-d\varepsilon}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}\left[1+k\right] - \frac{1}{k}\left\{\binom{k+2}{3}\varepsilon^3 - \cdots\right\}}}$$

$$\frac{k^2+3k+2-2k-2}{2k}$$

$$= \infty ?$$

Ein geringer !!

$$\frac{h\sqrt{\alpha}}{\sqrt{z_\infty}}x = -\sqrt{\frac{2}{1+k}}\log\varepsilon + \text{const} = -\sqrt{\frac{2}{1+k}}\log\left[1 - e^{h(U-U_\infty)}\right]$$

$$1 - e^{h(U-U_\infty)} = e^{-x\sqrt{\frac{1+k}{2}}\,\theta}$$

$$U = U_\infty + \frac{1}{h}\log\left[1 - e^{-x\sqrt{\frac{1+k}{2}}\,\theta}\right]$$

$x = 0 \quad U = -\infty!$

Für $k=1$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y-2y^2+y^3}}=\int\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)^2}}=\int\frac{dy}{(1-y)\sqrt{y}} = \log y+\int\cdots \quad \text{für } y=1$$

$$\frac{1}{(1-y)\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{(1-y)}+\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{(1-z^2)z} = -\frac{1}{2(1+z)}+\frac{1}{2(1-z)}+\frac{1}{z}$$

$$\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\cdots}} = \log\sqrt{y} - \log\sqrt{1-z} - \log\sqrt{1+z} = \log\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2}\log\frac{y}{1-y}$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{y}{1-y} = Ax_\circ + \text{const}$$

$y=1 \quad x=\infty \qquad \frac{1}{2}\log\frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \text{const}$

$$\alpha = \frac{4\pi e}{k} n_{10}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0^2 = \alpha+\beta+\gamma = \alpha\left\{1+\frac{1}{k\, z_\infty^{k+1}}+\frac{k+1}{k}\frac{1}{z_\infty}\right\} = \frac{4\pi e}{k} n_{10}\left\{1+e^{hU_\infty}+\frac{1}{k}\left[e^{hU_\infty}+e^{(k+1)hU_\infty}\right]\right\}$$

Zähigkeits-Widerstand einer [inne-] reibenden Flüssigkeit für Kugeln [illegible]

Für Scheiben: $\Pi = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu R^2}{l^3}\frac{dl}{dt}$

$l = \frac{r^2}{2R}$

$d\Pi = -\frac{3}{\cancel{2}}\mu\,\frac{r\,dr}{l^3}\,\frac{dl}{dt} = -3\mu\; r\,dr\left(\frac{2R}{r^2}\right)^3\frac{dl}{dt}$

$\Pi = -3\mu\; 8R^3\int_0 \frac{dr}{r^5}\,\frac{dl}{dt} = \infty$!

Formel $\bar{\Delta}^2 = 2\nu P$ Kann sie nicht bewiesen werden durch Schluss von ν auf $\nu+1$?

$\cancel{W(n,m) - W(n-1,m-1) = P[W(n-1,m) - W(n-1,m-1)]}$

$\cancel{W(n,m) = W(n-1)}$

$\cancel{W(n+1, m) = P\,W(n,m) + (1-P)\,W(n,m-1)}$

Die Gleichung

$W(n+1,m) = W(n,m)\cdot P + (1-P)\,W(n,m-1)$

ist unmittelbar evident, denn die Anfangszahl $n+1$ kann man sich zerlegt denken in n Teilchen und ein einzelnes, welches wir separat im Auge behalten

Die Endzahl m kann dann in zweifacher Weise resultieren: entweder dadurch dass die n sich in $m-1$ verwandeln und auch das eine drinnen bleibt $\cdot\,(1-P)\,W(n,m-1)$

oder dass n sich in m " " " sich entfernt $P\,W(n,m)$

$$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\overline{W}(n,m) = \frac{e^{-\nu}\nu^m}{m!}\overline{W}(m,n)$$

$$\overline{W}(n+1,n) = \overline{W}(n,n)P + (1-P)\overline{W}(n,n-1) \quad \| \quad \overline{W}(n\ n+1) = \overline{W}(n-1,n+1)P + (1-P)\overline{W}(n-1,n)$$

$\cancel{\overline{W}(n+1,n) = \overline{W}_{n-1}}$

$\cancel{\overline{W}(n+1,n+1) = \overline{W}(n,n+1)P + (1-P)\overline{W}(n,n)}$

$$\overline{W}(n,n+1) = \frac{\nu}{n+1}\overline{W}(n+1,n)$$

$$\psi(x) = \int_{\sim} \varphi(x_0)\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}\, dx \qquad \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$S = \int \frac{p\,dv}{T} + \int \frac{c\,dT}{T} = c \lg \frac{T}{T_0} + R \lg \frac{v}{v_0}$$

$$S = n\, a \lg \frac{\nu}{n} = k \lg \overline{W} + S_0$$

$$\overline{W} = \left(\frac{\nu}{n}\right)^n f\ldots \qquad \cancel{\frac{e^{-\nu}\nu^2}{2!} = \frac{e^{-\nu}\nu^2}{n^2}}$$

$dn_1 = n_1 \times$ Wahrsch. einer Anlagerung im Zeitraum dt

$$\frac{1}{t} = 2\pi D k n = 4\pi \frac{HT}{N}\frac{2\rho}{6\pi\mu\rho} = \frac{4}{3}\frac{HT}{N}\frac{1}{\mu}n = 1$$

$$m = \frac{\omega}{N}$$

$$\frac{n}{N} = \frac{\mu}{\frac{4}{3}HT} = \frac{10^{-2}}{\frac{4}{3}\cdot 83\cdot 10^7\cdot 300} = \frac{1}{3}\,10^{-12}$$

$$\cancel{\frac{n}{N} = \frac{\mu n}{\omega}}$$

$$= \frac{m}{\omega}$$

$$nm = \ldots Nm = \ldots\ldots\ \omega$$

normale Lösung enthält 1 gr Mol. in 1000 cm³ 0·001 grMol in 1 cm

0·001 . N Teilchen in 1 cm³

also ist $1000\frac{n}{N}$ = Normalität der Lösung

$$\frac{dn_1}{dt} = -\overbrace{8\pi D R}^{\beta}\, n_1^2 + \frac{\beta R}{\sqrt{\pi D t}}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -\beta n_1^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{t}}$$

$$\eta = \frac{2R}{\sqrt{\pi D t}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\pi \cdot 10^{-7}}} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{10^{-4} \cdot 5{\cdot}5} = 1{\cdot}4 \cdot 10^{-2}$$

$$Z = 1 - \left[1 + \frac{1}{x}\right] e^{-\frac{1}{x}}$$

$x = 1$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}3010 \\ -0{\cdot}4343 \\ \hline 0{\cdot}8667 - 1 \\ \\ 0{\cdot}736 \end{array}$$

$Z = 0{\cdot}264$

$x = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}4771 \\ -0{\cdot}8686 \\ \hline 0{\cdot}6085 - 1 \\ \\ 0{\cdot}406 \\ 0{\cdot}594 \end{array}$$

$x = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}6021 \\ 1{\cdot}3029 \\ \hline 0{\cdot}2992 - 1 \\ \\ 0{\cdot}199 \\ 0{\cdot}801 \end{array}$$

(Wendepunkt)

$x = 0{\cdot}2$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}7782 \\ -2{\cdot}1715 \\ \hline 0{\cdot}6067 - 2 \\ \\ 0{\cdot}0404 \end{array}$$

$Z = 0{\cdot}96$

$x = 0{\cdot}25$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}6990 \\ -1{\cdot}7372 \\ \hline 0{\cdot}9618 - 2 \\ \\ 0{\cdot}0916 \end{array}$$

$Z = 0{\cdot}91$

$x = 2$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}1761 \\ -0{\cdot}2172 \\ \hline 0{\cdot}9589 - 1 \\ \\ 0{\cdot}91 \end{array}$$

$Z = 0{\cdot}09$

$x = 1 - \frac{4}{e^3}$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}6021 \\ 1{\cdot}7372 \\ \hline 0{\cdot}8649 - 2 \\ \\ 0{\cdot}0733 \end{array}$$

$D = \frac{HT}{N}\frac{1}{6\pi a\mu}$ ‖ $c^2 = RT = \frac{HT}{\mu} = \frac{1}{M}\frac{HT}{N}$

$t > \frac{6D}{c^2} = \frac{\frac{1}{6\pi a\mu}\cdot M}{} = \frac{\frac{4}{3}a^3\pi\rho}{a\pi\mu} = \frac{4}{3}\frac{a^2\rho}{\mu}$ $\left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2m\pi}$

$\lambda = \frac{C}{W}M$

$\tau = \frac{\lambda}{C} = \frac{M}{W}$

$\lg = m\lg m - m + \frac{1}{2}\lg m + \lg\sqrt{2\pi}$

$-2\lg\left(\frac{m-n}{2}\right)! = -2\left\{\frac{m-n}{2}\lg(m-n) - \frac{m-n}{2}\lg 2 - \frac{m-n}{2} + \frac{1}{2}\lg\frac{m-n}{2} + \lg\sqrt{2\pi}\right\}$

$\binom{m}{\frac{m-n}{2}} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}{1.2.3\dots\frac{m-n}{2}} = \frac{m!}{\left[\left(\frac{m-n}{2}\right)!\right]^2} = \frac{m!}{\frac{m-n}{2}!\,\frac{m+n}{2}!}$

$m\lg m - (m-n)\lg(m-n) - n\lg 2 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\lg m - \frac{1}{2}\lg\frac{m-n}{2} - \lg\sqrt{2\pi}$

$\frac{n}{m} = \delta$

$m\lg m - m(1-\delta)\lg m - m(1-\delta)\lg(1-\delta) + \lg\sqrt{\frac{1}{1-\delta}} + \frac{n}{2} + \cancel{\dots} - n\lg 2 - \lg\sqrt{\pi}$

$= m\delta\lg m + m(1-\delta)\left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left[\delta + \frac{\delta^2}{2} + \dots\right] + \frac{m\delta}{2} - \frac{m\delta}{2}\lg 2 - \lg\sqrt{\pi}$

$x = n\delta$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,e^{-\frac{n^2}{2m}}$ $m = \frac{t}{\tau}$ $n = \frac{x}{\delta}$ $\frac{x^2\tau}{2\delta t} = \frac{x^2}{4Dt}$ ‖ $D = \frac{\delta^2}{2\tau}$

$W_1 = \frac{1}{2}$ $1, 2$ $n = 4$ $W_2 = \frac{1}{3}$ $1, 2, 3$ $n = 1$ $n=1$ $n=2$

1. Urne: 1, 2, 1

2te Urne: 1, 2,

1\. $W = \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$
2: $W = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$

$z = 1$). $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ‖ 1: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{5}{3}$

$z = 2$ $\frac{7}{3}$ 2: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{4}{3}$

$z = 3$ $\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\beta}^{\infty} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\beta^2}\right]$$

$$\frac{e^{-\beta^2}}{2\beta}\left[1-\frac{1}{2\beta^2}+\dots\right] \qquad = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{e^{-\beta^2}}{2\beta^2}+\dots\right\}$$

$$\overline{(x-x_0)^2} = 2\,\overline{\xi^2}\cdot\varphi(t) \qquad \bar{x} = x_1\,\varphi(t)$$

$$\frac{d}{dt} \qquad = 2\frac{\overline{\xi^2}}{x_1}\,\frac{d}{dt}\bar{x} \qquad\qquad D = \beta\overline{x f} \;\; ?$$

$$\overline{\Delta^2} = 2\,\overline{\xi^2}\,P \qquad\qquad \frac{\overline{\Delta_n}}{n-\nu} = P$$

Lassen sich die Formeln für $\overline{\Delta^2}$ etc und für Wahrscheinlichkeit nicht ganz allgemein auf alle irreversiblen Systeme? Insbesondere Wärmeleitung und Strahlung! Chemisches Gleichgewicht!

$\nu = 1{,}55$ $\qquad e^{-\nu}\,\nu^n$

0,4343	0411	0411	0411	0411	0411	0411	0411
21715	1903	3806	5709	7612	9515	1418	3321
2171	~~6732~~	~~6732~~	~~6732~~	~~6732~~	~~6732~~	~~6732~~	~~6732~~
0,6731	2314	4217	6120	8023	9926	1829	3732
7110	170,4	264,06	4093	6343	9830	1524	~~3732~~
0,0411			68,2	1057	8,2	127	39 6,5
1059				26,4		21	9
						1,55 / 7	2362 / 3,6 : 7

$$\Theta_1 + T_1 = \tau\,\frac{M_1+2M_2+3M_3+\dots+N_1+2N_2+3N_3+\dots}{N_1+N_2+N_3} = \frac{\tau}{W(n)} = \tau\,\frac{1}{W(n)}\;\frac{1}{1-W_n(0)}$$

$$\Theta : T = W_n(0) : 1-W_n(0)$$

$$\frac{\frac{4}{3}a^3\pi}{4a^2\pi} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{e^{-\nu}\,\nu^n}{n!} = \frac{e^{-\nu}\,\nu^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}} = \left(\frac{\nu}{n}\right)^n\frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2n\pi}} = (1+\delta)^{\nu}\,\frac{e^{\nu\delta}}{\sqrt{2\nu\pi}} = \frac{e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$\lg = \nu\delta + \nu\lg(1+\delta) = \nu\frac{\delta^2}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\;\frac{n}{m}\;e^{-\frac{n^2}{2m}} \qquad \Big|\; x = n\delta \quad m = \frac{t}{\tau} \qquad \frac{n^2\delta^2}{2\frac{t}{\tau}\delta^2} \quad \frac{x^2}{4Dt} \qquad 2D = \frac{\delta^2}{\tau}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n^2}{2m}}\;\frac{1}{m}\;e^{-\frac{n^2}{2m}} = \frac{x}{\sqrt{\pi}}\;\frac{\tau}{t}\;\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\;e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\left[1-\frac{1}{V}\sqrt{\frac{D}{\pi t}}\right]^N = e^{-\frac{N}{V}\sqrt{\frac{D}{\pi t}}} \qquad \Bigg\| \qquad W_t \qquad n_1\left(1-\frac{4\pi R D}{V}t\right)^N$$

$$\Delta \quad n_1 e^{-4\pi R D n_1 t}$$

$$n_1^2\;4\pi R D$$

$$\Delta n_1 = n_1\left[1-e^{-4\pi R D n_1 \tau}\right] = -4\pi R D n_1^2 \tau$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -4\pi R D n_1^2$$

---

1. Bei Anwendung d. Br. B. auf Grund d. Sedimentations Gleichgew. Korrektion in osmot. Druck

und Gesetz. würde Korrektion der B. B. Formel ergeben

Vor Allem Abhängigkeit d. D von Konzentration

2). Unregelmässige Behandl. d. Gleichgew. einer Zelle Zusg. ~~mit~~ im Sedimentations Gleichgewicht

Änderungen d. Dispersionsgrades

$$W = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\left\{ e^{-\frac{x^2}{4Dt}-\frac{cx}{2D}-\frac{c^2t}{4D}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}}\;e^{-\frac{cx}{D}}\int_{\frac{x-ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\;e^{-\frac{(x+ct)^2}{4Dt}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}}\;e^{-\frac{cx}{D}}\int_{\frac{x-ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

$$C = \sqrt{\frac{3}{\mu}\frac{HT}{N}}$$

$$D = \frac{HT}{N}\frac{1}{6\pi a\mu}$$

$$c = \frac{M\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)g}{6\pi a\mu}$$

$$\frac{c}{D} = M\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)g\cdot\frac{N}{HT}$$

$$W\,dx = \frac{\tau}{T} = \frac{dx}{cT}\ldots \qquad T = \frac{D}{c^2}\,e^{\frac{cx}{D}}$$

$$c = \frac{\frac{4}{3}a^3\pi(\rho-\rho_0)g}{6\pi\mu a} = \frac{D\,\frac{4}{3}a^3\pi(\rho-\rho_0)g}{\frac{HT}{N}}$$

$$\frac{c}{D}\,\frac{HT}{N}\cdot\frac{D}{c}$$

$$\frac{10^{-7}}{10\cdot 10^{-5}} = 10^{-3}$$

$$\int_0^\infty \xi^2 e^{-\alpha\xi^2}d\xi = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\xi^2}d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^\infty \xi e^{-\alpha\xi^2}d\xi = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\overline{\xi^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\bar{\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \Big\| \quad \bar{\xi} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\cdot C$$

$$\sqrt{\overline{\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{3}}$$

rotierendes Gefäss mit einem Teilchen, welches leichter ist als das Medium!

Objekt in der Axe und womöglich systematische mikrophotogr. Aufnahmen des Sedimentationsfeldes! und damit präzisere Bestimmung von N

$$\frac{4}{3}\frac{(0{\cdot}2)^3}{2}\frac{\pi}{1000}\cdot 10{\cdot}7 = \frac{4}{3}\pi\cdot 32\cdot 10{\cdot}7\cdot 10^{-6} = 4\cdot 3{\cdot}35\cdot 1{\cdot}07\cdot 10^{-4}$$

$$1{\cdot}34\cdot 1{\cdot}07\cdot 10^{-3}$$

$$1{\cdot}43$$

819
91
8281
74529
7534
4520
1·27 · 4/3

$$\frac{4}{3}\frac{(0{\cdot}091)^3\pi}{1000}\cdot 1{\cdot}6 = \frac{4}{3}\pi\cdot(0{\cdot}91)^3\cdot 1{\cdot}6\cdot 10^{-6}$$

$$= 5\cdot 10^{6}$$

33 · 7 · 231

Änderung d. Diffusionskoeffizient in konzentrierten Lösungen:

$$p = A\varphi(1+\alpha\varphi) \quad \text{(Abw. vom Boyle' Satz)}$$

$$\mu = \mu_0(1+\beta\varphi)$$

$$D\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\therefore D = D_0\frac{1+2\alpha\varphi}{1+\beta\varphi} = D_0\left[1+(2\alpha-\beta)\varphi\right]$$

$$\alpha = \frac{4}{3}a^3\pi(\rho-\rho_0)g\frac{N}{HT}$$

$$n = n_0 e^{-\alpha y}$$

$$g\int_0^\infty n\,dy = g\frac{n_0}{\alpha} = N$$

$$\frac{1}{N} = \frac{\alpha}{g}\frac{1}{n_0}$$

$$p = \frac{n_0}{\alpha}g(\rho-\rho_0) = n_0\left(\frac{N}{HT}\right)^{-1}$$

$$\int(p-p_0)\frac{dN}{N^2} = \frac{g(\rho-\rho_0)\alpha}{\alpha g}\int_{n_{00}}^{n_0}(n_0-n_{00})\frac{dn_0}{n_0^2}$$

$$= \frac{g(\rho-\rho_0)}{g}\underbrace{\int\left(\frac{dn_0}{n_0} - n_{00}\frac{dn_0}{n_0^2}\right)}_{\left[\lg\frac{n_0}{n_{00}} + n_{00}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_{00}}\right)\right]}$$

$$n_0 = n_{00}(1+\delta)$$

$$\left.\begin{aligned}&\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3}\\ &+ \frac{1}{1+\delta} - 1\end{aligned}\right\} =$$

$$\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \delta - \frac{\delta^2}{2} \ldots$$

$$= -\delta^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x}\left[W f(x)\right] \quad \Big| \; e^{-\alpha t}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\partial W}{\partial t}\, dt = W e^{-\alpha t}\Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty W e^{-\alpha t}\, dt = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^\infty W e^{-\alpha t}\, dt\right) - \beta \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\int_0^\infty W e^{-\alpha t}\, dt\right]$$

$$W_{t=0} + \alpha \Phi = D \frac{d^2\Phi}{dx^2} - \beta \frac{d}{dx}\left[f(x)\, \Phi\right] \qquad \Phi = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, W\, dt$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\overbrace{\boxed{\frac{HT}{N}\cdot\frac{4}{3}a^3\pi(\rho-\rho_0)g}}^{\alpha}\; n$$

$n = \frac{1}{v} = \frac{1}{\text{Vol. welches auf 1 Teilchen entfällt}}$

$$v\, dp = -\alpha\, dy$$

$$\boxed{\cancel{\int_v^{v_0}(p-p_0)\, dv = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial v}\cdot(v-v_0)^2}}$$

$$\int v\, dp = -\alpha y = \int \frac{dp}{n}$$

$$= \int_{n_{y=0}}^{n_y} \frac{\varphi'(n)}{n}\, dn = \Phi(n)$$

$$p = \varphi(n)$$

$$-\alpha n\, dy = dp$$

$$-\alpha \int_0^\infty n\, dy = p_{y=0}$$

Schwankungen der Gesamtzahl der sedimentierten Teilchen

$$n_0 m = \rho$$

$$p = \frac{\rho}{m}\left(\frac{N}{HT}\right)^{-1}$$

$$\int_1^2 (p-p_1)\, dv = -\frac{1}{m}\left(\frac{N}{HT}\right)^{-1}\int(\rho-\rho_1)\frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$= -\left(\frac{N}{mHT}\right)^{-1}\left[\lg\rho + \frac{\rho_1}{\rho}\right]_1^2$$

$$= -\left(\frac{N}{mHT}\right)^{-1}\left[\lg\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\rho_0}{\rho} - 1\right]$$

$$-\left[\lg(1+\delta) + \frac{1}{1+\delta} - 1\right]$$

$$-\left[\delta - \frac{\delta^2}{2} - \delta + \delta^2\right]$$

$$\eta = -\left(\frac{N}{mHT}\right)^{-1}\frac{\delta^2}{2}$$

$$P(N_0 \ldots N) = N \cancel{m}\, \frac{1}{\cancel{m}}\, \frac{HT}{N}\, \frac{\delta^2}{2}$$

$$\boxed{W(\delta)\, d\delta = e^{-N\frac{\delta^2}{2}}\, d\delta}$$

$$u_0 \qquad u_1 \qquad u_2$$

$$\lim_{\left(\frac{k}{n}=0\right)} \overline{W}_n(+k) = e^{-\nu P}\left\{\binom{n}{0}(1-P)^n P^0 \frac{(\nu P)^k}{k!} + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P^1 \frac{(\nu P)^{k+1}}{k+1!} + \binom{n}{2}(1-P)^{n-2}P^2\frac{(\nu P)^{k+2}}{k+2!} + \cdots\right.$$

$$\lim \frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} \frac{P}{1-P} (\nu P) \frac{(k+m)!}{(k+m+1)!} = \frac{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} \frac{\nu P^2}{1-P} \frac{1}{k+m+1}$$

$$= \frac{n-m}{m+1} \frac{1}{k+m+1} \frac{\nu P^2}{1-P}$$

$$= e^{-\nu P}\left\{\binom{n}{n}(1-P)^0 P^n \frac{(\nu P)^{n+k}}{n+k!} + \binom{n}{n-1}(1-P) P^{n-1} \frac{(\nu P)^{n+k-1}}{n+k-1!} + \binom{n}{n-2}(1-P)^2 P^{n-2}\frac{(\nu P)^{n+k-2}}{n+k-2!}\right.$$

$$\lim \frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{\binom{n}{n-m-1}}{\binom{n}{n-m}} \frac{(1-P)}{\nu P^2} (n+k-m) = \frac{n-m!\, m!}{n-m-1!\, m+1!} \frac{1-P}{\nu P^2}(n+k-m)$$

$$= \frac{(n-m)}{m+1}(n+k-m) \frac{1-P}{\nu P^2}$$

$$W(\delta) = e^{-(\alpha\delta+\beta\delta^2)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\delta)\, d\delta = e^{\frac{\alpha^2}{4\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{\alpha}{\sqrt{4\beta}} + \sqrt{\beta}\,\delta\right]^2} d\delta = e^{\frac{\alpha^2}{4\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int \delta\, W(\delta)\, d\delta = -\frac{\alpha}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{\frac{\alpha^2}{4\beta}} \qquad \overline{\delta} = -\frac{\alpha}{2\beta}$$

$$\int \delta^2 W(\delta)\, d\delta = \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}\right] e^{\frac{\alpha^2}{4\beta}} \qquad \overline{\delta^2} = \frac{1}{2\beta}\left[1 + \frac{\alpha^2}{2\beta}\right]$$

$$= \left\{\overline{\delta}\right\}^2 + \frac{1}{2\beta}$$

$$\overline{k} = (n-\nu)P = \nu\delta P$$

$$\overline{k^2} = P^2(n-\nu)^2 + (n+\nu)P - nP^2$$

$$= \nu^2\delta^2P^2 + \nu(2+\delta)P - \nu(1+\delta)P^2$$

$$\frac{d^k}{d(\nu P)^k} W_n(\nu k) = e^{-\nu P}\left\{\binom{n}{0}(1-P)^n P^0 + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}\frac{\nu P^2}{1} + \binom{n}{2}(1-P)^{n-2}\frac{(\nu P^2)^2}{2!} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= W_n(0)$$

1·93				
$(1{\cdot}0598)^2$	$(1{\cdot}299)^2$	$(1{\cdot}598)^2$	$(1{\cdot}897)^2$	
~~0252~~	~~1136~~	~~1036~~	~~2784~~	
2856	2856	2856	2856	
0504	2272	4072	5562	
2348	0584	8784	7294	
1·71	1·14	0·756	0·536	
1·97				
$(1{\cdot}0912)^2$	1·228	1·456	2824	$(1{\cdot}912)^2$
2945				
0758	~~0892~~	~~1632~~	~~4508~~	2814
	2945	2945	2945	2945
2187	1784	3264	9016	5620
	1161	9681	3929	7317
165	1·21	0·929	0·247	0·539

1·0564	1·376	1·752	2·128	2·504
0239	1386	2435	3280	3986
2945	2945	2945	2945	2945
0478	2772	4870	6560	7972
2467	0173	8075	6385	4973
1·76	1·04	0·642	0·435	0·314

Falls erster Zeitraum ausgeschlossen wird:

$$n = \cancel{\frac{n_0}{[1+4\pi D R n_0 t]^2}} = \frac{n_0}{\left[1+4\pi D R n_0 (t+\tau)\right]^2}$$

$$n_1 = \frac{n_0}{\left[1+4\pi D R n_0 \tau\right]^2}$$

$$n = n_1 \left[\frac{1+4\pi D R n_0 \tau}{1+4\pi D R n_0 (\tau + t)}\right]^2 = n_1 \left[\frac{1+\beta\tau}{1+\beta\tau+\beta t}\right]^2$$

$$\sqrt{\frac{n_1}{n}} = 1 + \frac{\beta t}{1+\beta\tau}$$

$$\frac{\beta}{1+\beta\tau} = \frac{\sqrt{\frac{n_1}{n}}-1}{t}$$

τ 0	1·97						
2	1·35	1303					
t 5	1·19	0755	0548	0274	1·0652	0·0652 : 3 = 0·0217	
10	0·89	9494	1809	0·9045	1·2315	0·2315 : 8 = 0·0289	
20	0·52	7160	4143	2·0715	1·611	0·611 : 18 = 0·034	
40	0·29	4624	6679	3·3395	2·158	1·158 : 38 = 0·0305	

stimmt noch schlechter als Berechnung von $t=0$ aus, wahrscheinlich weil eben die Beobachtung bei $t=2$ die fehlerhafteste ist, infolge zu langsamer Wirkung des Schutzkolloids

Ein Opaleszenz ist maßgebend $\sum k^2 n_k$

$$= \frac{n_0}{(1+\varepsilon)^2} + 2^2\frac{n_0\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3} + \frac{3^2 n_0\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^4} + \dots = \frac{n_0}{(1+\varepsilon)^2}\left[1 + \frac{2^2\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{3^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} + \dots\right]$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right] = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \qquad \left[1 + \frac{2^2\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{3^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} + \dots\right] = \frac{\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}}{\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^3} = \cancel{\frac{(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}} = (1+2\varepsilon)(1+\varepsilon)^2$$

$$\sum{}' = \cancel{\frac{n_0(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2}} = n_0(1+2\varepsilon)$$

also proportionale Zunahme mit Zeit, wie das tatsächlich bei einigen Lösungen. Versuchen der Fall ist. Natürlich nur solange Teilchen klein sind im Vergl. mit Lichtwellenlänge.

Rayleigh: für kleine r: $h \sim n r^6 = \chi r^3$

für große (Clausius) $\sim n r^2 = \chi / r$

$r = 2.4 \cdot 10^{-6}$

$n = 10^{10}$

$10^{10}\,\pi\,(2.4)^2 \cdot 10^{-12} = 0.46\ \mathrm{cm}^2$

$e^{-\gamma t}$

Gamm Tab. XVI – XXI

$\Delta y_\infty = y \cdot \chi^s$ (Gamm) ~~unmöglich~~

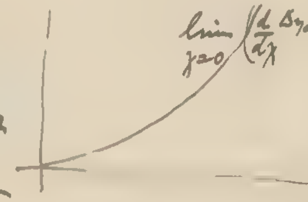
$Al(OH)_3$ i. L.	φ_0	φ_∞	$\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0 = 50.8}$
$\chi^0 =$ Schutt 1·1	52·4	64·0	1·260
1·5	53·0	72·6	1·429
2·0	53·6	79·8	1·575
2·5	54·5	93·3	1·837
3·0	55·2	110·5	2·175
4·0	56·7	147·2	2·897

$\frac{\partial \Delta y_\infty}{\partial \chi} =$

$\varphi_\infty = \varphi_0 \, \text{fc.}(\chi)$ || $\lg \Delta_y = \lg y + s \lg \chi$; $\frac{d\Delta_y}{\Delta_y} = s \frac{d\chi}{\chi}$

unmöglich da im Grenzfall

$\lim_{\chi=0} \left(\frac{d}{d\chi} \Delta y_\infty\right)$ nicht null sein muss,



1639 – – 1639
~~4526~~ 2596 ~~7064~~ ~~3897~~
4143 4620

Allgemein: $\mu = \mu_0 \, \text{fc.}(\Phi)$ || Für Anfangsstadium, wo wahrscheinlich

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \alpha \Phi$$

$$\Phi = n_0 \, \text{Fc.}(n_0 t)$$

$$\frac{\Phi}{n_0} = \text{Fc.}(n_0 t)$$

so wollte also $\frac{\frac{\mu}{\mu_0} - 1}{n_0} = \text{Fc.}(n_0 t)$

$\therefore \mu = \mu_0 \, \text{fc}[n_0 \, \text{F}(n_0 t)]$

$$x = \frac{62.8 - 52.4}{64.0 - 52.4} \div = \frac{10.4}{11.6}$$ 0170 / 0645 / 9525. $\cdot 8964$ Antil.

Korrespondierende Punkte (40.1·1)

62·8	$\frac{10.4}{52.4 \cdot 1.1}$	$= \text{Fc.}(44)$
$y = 68.44$	$\frac{15.44}{53.0 \cdot 1.5}$	$= \text{Fc.}(29.3\cancel{3} \cdot 1.5)$
74·7	$\frac{21.1}{53.6 \cdot 2}$	$= \text{Fc}(22.2)$
86·67	$\frac{32.17}{54.5 \cdot 2.5}$	$= \text{Fc}(17.6 \cdot 2.5)$
94·87	$\frac{39.67}{55.2 \cdot 3}$	$= \text{Fc.}(14.7 \cdot 3)$

$\frac{44}{1.5} = \frac{88}{3} = 29.3$; 22 ; 30 ; 7·3 ; 8·7 ; 1·7 ; 1·6 ; 15 ; 17·6 ; 22 ; 85·5 ; 85·8 ; $\frac{2.6}{7} \cdot 2.3$; 0·87

10   90·3
14·7
15   94·9 $\frac{0.3}{50} \cdot 4.6 = 0.03$

124·6 | $\frac{67.9}{56.7 \cdot 4}$ $= \text{Fc.}(11.4)$

10   119·6
11   124·6
15   125·8

1.65

Φ			$\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}$
0.260	$: 1.1 =$	0.236	0.260
0.429	$: 1.5 =$	0.286	0.404
0.575	$: 2 =$	0.287	0.620
0.837	$: 2.5 =$	0.335	0.878
1.175	$: 3 =$	0.392	1.166
1.897	$: 4 =$	0.474	1.896

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \alpha\,\Phi\left(1 + \frac{\Phi}{2}\right)$$

$$\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} = \alpha\,\Phi\,(1+\beta\,\Phi)$$

$$\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0\,\Phi_1} = \alpha\,(1+\beta\,\Phi_1)$$

$$\frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_0\,\Phi_2} = \alpha\,(1+\beta\,\Phi_2)$$

$$\Delta = \alpha\beta\,\underbrace{(\Phi_2-\Phi_1)}_{2.9}$$

$$0.238 = 2.9$$

$$\alpha\beta = \frac{0.238}{2.9} = 0.082$$

$$\alpha = 0.236 - 0.082 \cdot 1.1$$

$$\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} = 0.146\,\overset{\chi}{\Phi} + 0.082\,\overset{\chi^2}{\Phi^2}$$

$0.090\ 2$ 0.146 82 902

82 492 1312

738 185

0.219 185 0.404

292 328 620

438 738 1166

584 1312 1896

365 513 878

205 $51\ 25$

Annahme:

$\Phi_\infty \sim \chi_\infty$

$\mu = 62.8$

$$\mu = \frac{68.41 - 50.8}{50.8} = 0.146\,\Phi + 0.082\,\Phi^2$$

$\mu = 124.6$

$\mu = 94.87$

$\mu = 86.67$

$\mu = 74.7$

$\mu = 74.7$

$\Phi = 0.922$	$: 1.1$	$= 0.84$
$\Phi = 1.350$	$: 1.5$	$= 0.90$
$\Phi = 1.67$	$: 2$	$= 0.84$
~~$\Phi = 3.40$~~		
~~$\Phi = 2.48$~~		
$\Phi = 2.17$	$: 2.5$	$= 0.87$
2.48	$: 3$	$= 0.83$
3.40	$: 4$	$= 0.85$

0.855

Vergl. Sam. p. 112

Kann mein Resultate nicht formelhaft darstellen

Ausscheidung übersättigter Lösung an Kondensationskernen (Vergl. Ken, Porter PRS. 89, 379 1913)

Sobald Anzahl und Grösse der Kerne gegeben ist:

~~$4\pi R D$~~

Annähernd ?

$$\frac{dc}{dt} = -4\pi R D n_0 c$$

Bei Berücksichtigung des Volumenwachses

$$R \sim \underbrace{\left(\frac{c_0 - c}{n_0}\right)}_{y}^{1/3} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dt} = + \underbrace{4\pi D n_0 \left(\frac{3}{4\pi n_0}\right)^{1/3}}_{\alpha} \, y^{1/3} \, (c_0 - y)$$

also im ersten Stadium:

$$\frac{dy}{dt} = +\alpha y^{1/3}$$

$$\frac{dy}{y^{1/3}} = +\alpha \, dt$$

$$+\frac{3}{2} \underbrace{y^{2/3}}_{\sim R^2} = +\alpha t$$

$$y = \left[\frac{3}{2} \alpha t\right]^{3/2} =$$

Dabei wird aber noch ganz etwas anderes mitspielen: die Abhängigkeit d. Löslichkeit von der Korn ist!

Dasselbe auch bei Wasserdampfkondensation an Ionen.

Auch für $t=0$ stimmt die Formel denn dann gilt $\frac{\Phi}{n_0} = F_1(0)$

$\therefore \Phi \sim n_0$

		$\mu-\mu_0$	$\frac{\mu-\mu_0}{\chi}$
$\mu_0 = 50.8$	$\chi = 0$		
$\mu = 52.4$	$\chi = 1.1$	1.6	$= 1.5$
53.0	$\chi = 1.5$	2.2	1.5
53.6	2.0	2.8	1.4
54.5	2.5	3.7	1.5
55.2	3.0	4.4	1.5
56.7	4.0	5.9	1.5

$\frac{1.5}{50.8}$ $\overline{0146}$

$\neq \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}$

Allerdings ist hier vielleicht gelegentlich umgekehrt von Sams interpoliert (Siehe p. 86).

$$n = \mu_0\left[1 + 0.146\,\Phi + 0.082\,\Phi^2\right]$$

50.8

1.0146
82
1.01542
50771
812
51.583
508
1.783

1.0292
328
1.03248
1.01542
0.01706
1542
164
51624
826
52.4493
51.583
0.8663
783
89.3

1.0438
738
1.05118
1.03248
0.01870
1706
164 . 508
82
13
833

1.146
82
1.228
614
98
62.38

1.073
205
1.0935
54675
875
55.55

$\Phi = 0$	$\mu = 50.80$	78
0.1	51.58	87
0.2	52.45	95
0.3	53.40	103
0.4	54.43	112
0.5	55.55	120
0.6	56.75	128
0.7	58.03	
0.8	59.40	
0.9	60.85	
1.0	62.38	
1.1	~~[illegible]~~ 64.00	
1.2	65.69	
1.3	67.48	
1.4	69.34	
1.5	71.29	
1.6	73.32	
1.7	75.44	
1.8	77.64	
1.9	79.93	
2.0	82.30	
2.1	84.75	
2.2	87.28	
2.3	89.89	
2.4	~~[illegible]~~ 92.59	
2.5	95.37	
2.6	98.24	
2.7	101.19	
2.8	104.22	
2.9	107.34	
3.0	110.54	

3.0	[illegible]
3.1	[illegible]
3.2	[illegible]
3.3	[illegible]
3.4	124.47
3.5	[illegible]
3.6	[illegible]
3.7	[illegible]
3.8	[illegible]
3.9	[illegible]
4.0	147.12

(1.1)	$\Phi =$	$\frac{\Phi}{n_0}$	tn
52.4	0.2 − 5/06 37		
52.4	0.194	0.176	0
53.0	0.257	0.234	2.2
54.4	0.397	0.361	5.5
57.0	0.620	0.564	11
59.6	0.787	0.715	16.5
60.6	0.883	0.803	24.2
61.8	0.962	0.875	33.0
62.8	1.027	0.934	44.0
63.2	1.053	0.957	55.0
63.6	1.077	0.979	66.0
63.9	1.094	0.995	82.5
64.0	1.100	1.000 0.893	99.0
	0.992		

(4.0)	$\Phi =$	Φ / n_0	tn
56.7	0.596	0.149	0
77.7	1.803	0.451	8
109.0	2.952	0.738	20
119.6	3.270	0.817₅	40
120.8 / 125.8	3.445	0.861	60
129.8	3.554	0.888₅ (893)	88
130.9 / 132.0	3.614	0.903₅	120
135.4	3.703	0.926	160
139.2	3.802	0.950₅	240
147.2	4.002	1.000₅	720

[illegible] $= \mu_0[1+\alpha\Phi_2+\beta\Phi_2^2]$

[illegible] $= \mu_0[1+\alpha\Phi_1+\beta\Phi_1^2]$

$\frac{134}{50.8} - 1 = \alpha\Phi_2 + \beta\Phi_2^2 \qquad \cancel{\frac{96.4}{50.8}} = \alpha + \beta\Phi_2$

$\frac{13.2}{50.8} - 1 = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_1^2$

$\frac{96.4}{50.8}\frac{1}{\Phi_2} - \frac{13.2}{50.8}\frac{1}{\Phi_1} = \beta\underbrace{(\Phi_2 - \Phi_1)}_{3.008}$

$\alpha = \frac{24.1}{50.8} - \beta\Phi_2$ 0.2824

3820
7059
6761

24.1
− 13.306
10.794
13.2 / 1056

$\frac{10.794}{50.8 \cdot 3.008} = \beta = 0.0706$

0.4743
0.2824
$\alpha = 0.1919$ 706

$\mu = 50.8\,[1 + 0.1919\,\Phi + 0.0706\,\Phi^2]$

0332 7059
1841 4702
8491

Φ_1

$\Phi_1 = 1$ 50.8 · 1.2625
63125
1010
64135
$\mu = 64.13$

17271
5719
1.22990 · 50.8
61495
984
62479

5648
57180

$\Phi_1 = 0.9$
$\mu = 62.48$ 32/168

$\mu \sim 62.8$
$\Phi = 0.92$

Φ	μ	
$\Phi = 0$	50.80	1.05
0.1	51.85	[illegible]
0.2	52.96	1.18
0.3	54.14	1.25
0.4	55.39	[illegible]
0.5	56.71	[illegible]
0.6	58.10	[illegible]
0.7	59.56	[illegible]
0.8	61.09	[illegible]
0.9	62.69	[illegible]
1.0	64.37	[illegible]
1.1	66.11	[illegible]
1.2	67.92	[illegible]
1.3	69.80	[illegible]
1.4	71.75	[illegible]
1.5	73.77	[illegible]
1.6	75.87	[illegible]
1.7	78.04	[illegible]
1.8	80.28	2.11
1.9	82.55	2.37
2.0	84.96	2.45
2.1	87.41	2.52
2.2	89.93	[illegible]
2.3	92.52	[illegible]
2.4	95.17	[illegible]
2.5	98.89	[illegible]
2.6	100.69	[illegible]
2.7	103.56	[illegible]
2.8	106.50	

Φ	μ	
$\Phi = 2.8$	106.50	[illegible]
2.9	109.51	[illegible]
3.0	112.58	[illegible]
3.1	115.72	[illegible]
3.2	118.93	[illegible]
3.3	122.20	[illegible]
3.4	125.55	[illegible]
3.5	128.98	[illegible]
3.6	132.48	[illegible]
3.7	136.05	[illegible]
3.8	139.69	[illegible]
3.9	143.40	3.78
4.0	147.18	

$$\mu = \mu_0 \left[1 + \underbrace{0.1981\,\Phi}_{=\frac{5}{2}\varphi} + 0.06905\,\Phi^2 \right]$$

$\mu_0 \to 50.8$

$\varphi = 0.07924\,\Phi$

z.B. für $\frac{1.1\,g}{liter}$ Sch...: $\varphi = 0.079 \cdot 0.15$

$= 0.012$

also ca ~~[illegible]~~ 50 mal mehr als Substanz-Volumen

$\Phi = \frac{1.1}{4 \cdot 10^3} = 0.000275$

$\cancel{\Phi}\ 0.0007$

52.4
50.8
1.6

3%

111

(1.1)	$\Phi=$	Φ/n	t_m
52.4	0.152	0.138	0
53.0	0.204	0.185	2.2
54.4	0.327	0.297	5.5
57.0	0.528	0.470	11
59.2	0.676	0.615	16.5
60.6	0.768	0.698	24.2
61.8	0.844	0.767	33.0
62.8	0.907	0.825	44.0
63.2	0.929	0.845	55.0
63.6	0.954	0.867	66.0
63.9	0.972	0.884	82.5
64.0	0.977	0.888	99.0

(2)		Φ/n	t_m
53.6	0.254	0.127	0
55.1	0.377	0.188₅	4
61.5	0.826	0.413	10
67.9	1.20	0.60	20
71.1	1.366	0.683	30
74.7	1.544	0.772	44
75.4	1.577	0.788₅	60
75.9	1.601	0.800₅	80
77.1	1.657	0.828	100
77.4	1.670	0.835	120
77.7	1.684	0.842	150
79.0	1.743	0.871	240
79.7	1.774	0.887	330
79.8	1.779	0.889	390
79.7	1.774	0.887	420

(4.0)	$\Phi=$	Φ/n	
56.7	0.500	0.125	0
77.7	1.684	0.421	8
109.0	2.883	0.721	20
118.6	3.220	0.805	40
125.8	3.407	0.852	60
129.8	3.523	0.881	88
132.0	3.586	0.896	120
135.3	3.682	0.921	160
139.2	3.786	0.946	240
147.2	4.000	1.000	720

(3)			
55.2	0.385	0.128	0
63.6	0.954	0.318	6
82.1	1.880	0.627	15
90.3	2.214	0.738	30
94.9	2.390	0.797	45
98.7	2.493	0.831	66
102.0	2.645	0.882	120
102.7	2.670	0.890	150
105.6	2.77	0.923	225
105.2	2.750	0.919	315
110.0	2.916	0.972	450
110.6	2.918	0.973	540
109.4	2.886	0.962	585
110.5	2.918	0.973	630
110.5	2.918	0.973	675

$n = 1.5$	Φ	t_n	Φ/n
53.0	0.204	0	0.136
54.3	0.312	3	0.208
57.3	0.542	7.5	0.361
62.1	0.863	15	0.575
64.6	1.013	22.5	0.675
66.9	1.144	33	0.763
68.6	1.236	45	0.824
68.8	1.248	60	0.832
69.7	1.274	90	0.849
71.3	1.362	112.5	0.90[illegible]
71.8	1.402	135	0.935
72.6	1.442	157.5	0.961
72.6	1.442	225	0.961

7.2 24
15.3 34
21.4 28

$n = 2.5$			
54.5	0.329	0.132	0
60.3	0.750	0.300	5
72.4	1.432	0.573	12.5
81.3	1.844	0.738	25
83.5	1.938	0.775	37.5
85.8	2.034	0.813	55
88.4	2.139	0.856	75
89.6	2.187	0.875	100
90.1	2.207	0.883	125
91.4	2.257	0.903	150
93.4	2.335	0.934	262.5
92.8	2.316	0.926	300
93.3	2.332	0.933	337.5
93.3	2.332	0.933	375
93.2	2.329	0.932	450

16.8

$$z = \cancel{\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für } x = 1$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für } x = 2$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{für } x = \frac{1}{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{3^n} = z_{1/2}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = 1 + \alpha\, \omega v + \beta (\omega v)^2$$

$$\frac{\mu_\infty}{\mu_0} = 1 + \alpha\, \omega v (1+\gamma) + \beta (\omega v)^2 (1+\gamma)^2$$

$$\frac{x}{1+x} = 2^{\cdot 1/2}$$

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$$

$$\lg z = n \lg \frac{x}{1+x}$$

$$\frac{\mu_\infty - \mu_1}{\mu_0} = \alpha\, \omega v \gamma + \beta (\omega v)^2 (2\gamma + \gamma^2)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \alpha\, \Phi + \beta\, \Phi^2 = 1 + \boxed{\alpha\omega}\, v \left[1 + \gamma \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right] + \boxed{\beta\omega^2}\, v^2 \left[1 + \gamma \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right]^2$$

$$\Phi = \omega v \left[1 + \gamma \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right]$$

$z = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2$ $x=1$ $z = \frac{1}{4}$

$x=2$ $z = \frac{4}{9}$

$x=\frac{1}{2}$ $z = \frac{1}{9}$

112

$12 + \frac{88}{2} = 56$ $x = 13.5$ mm $z = \frac{1}{2}$ $z = \frac{1}{9} = 21.8$ mm für $x = 2.75$

$12 + \frac{88 \cdot 4}{9}$ $\frac{352}{9} = 39$, $+12 = 51$ $x = 11$ mm $z = \frac{4}{9} = 51$ mm Einheit $= 5.5$ mm

$12 + 22 = 34$ $x = 6.2$ mm $z = \frac{1}{4} = 34$ mm Wendepunkt wäre dann für $x = 2.75$

$x = 10$ $z = \frac{10}{124} =$ 0828, 9172, 9445, 8617 0.826, 0.727, 12, $z = 84.7$ mm für $x = 55$ mm

$x = 4$ $z = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{10^2} = 0.64$ 8062, 9445, 7507 563, 12, $z = 68.3$ mm für $x = 22$ mm

$x = 20$ $z =$ 1010, 3222, 9788, 9576, 9445, 9021 7972, 12, $z = 91.7$ für $x = 110$ mm

$x = 40$ $z =$ 6021, 6128, 9893, 9786, 9445, 9231 838, 12, $z = 95.8$ für $x = 220$ mm

$$\frac{\mu}{\mu_0} - 1 = a\nu\left[1+\gamma\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right] + b\nu^2\left[1+\gamma\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right]^2$$

$$\Delta\mu_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 = a\nu \qquad + b\nu^2 \qquad \Big| \; 1+\gamma$$

$$\Delta\mu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\mu_0} - 1 = a\nu\left[1+\gamma\right] + b\nu^2\left[1+\gamma\right]^2$$

$$\Delta\mu_\infty - \Delta\mu_1(1+\gamma) = b\nu^2\left([1+\gamma]^2 - [1+\gamma]\right) = b\nu^2(\gamma+\gamma^2)$$

$$b = \frac{\Delta\mu_\infty - (1+\gamma)\Delta\mu_1}{\nu^2(\gamma+\gamma^2)}$$

$$a = \frac{\Delta\mu_1}{\nu} - b\nu$$

$$= \frac{\Delta\mu_1}{\nu} - \frac{\Delta\mu_\infty - (1+\gamma)\Delta\mu_1}{\nu\gamma(1+\gamma)} = \frac{\Delta\mu_1(\gamma+\gamma^2) - \Delta\mu_\infty + \Delta\mu_1(1+\gamma)}{\nu\gamma(1+\gamma)}$$

$$= \frac{\Delta\mu_1(\gamma+1)^2 - \Delta\mu_\infty}{\nu(\gamma+\gamma^2)}$$

$\varepsilon = c\nu t$

Also 5 allgemeine Konstanten $\alpha\, b\, c\, \gamma\, \mu_0$ während Gans vier Konstanten benützt $\mu_1\, \mu_\infty\, k_1\, b$, aber dabei k_1, b für jede Kurve ν extra bestimmt!

$$\frac{1+b_1 x}{1-x} = e^{\overbrace{k_1(1+b_1)}^{\alpha} t} \qquad \Big\| \; \cancel{k_1(1+b_1)\,dt = \frac{1-x}{1+b_1 x}\,\frac{(1-x)b_1 + (1+b_1 x)}{(1-x)^2} = \frac{1+b_1}{(1-x)(1+b_1 x)}}$$

$$1 + b_1 x = e^{\alpha t}(1-x)$$

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu_\infty-\mu_1} = x = \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + b_1}$$

→ gäbe für $x=0$: $\frac{dx}{dt} = k_1$ während nach meiner Formel $= 0$ (abweichend von Form $\nu = 1$)

für kleine t:

$$\mp \frac{\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}}{1 + b_1 + \alpha t}$$

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu_0} = a\nu\, \mu \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + b\nu^2\left[2\mu\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + \mu^2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4\right]$$

$$= \left[a\nu + 2b\nu^2\right]\mu\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + b\nu^2\mu^2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4$$

für gegebenes ν:

$$\mu-\mu_1 = A\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + B\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4 \qquad A\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\left[\frac{\varepsilon^2-(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2}\right]$$

$$\therefore \quad \mu_\infty - \mu_1 = A + B \qquad \therefore \mu-\mu_1 = (\mu_\infty-\mu_1)\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + B\left[\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}^2\right]$$

also ~~?~~ vier Konstanten A B c μ_1 (rii Sam)

~~während Sam der Konstante braucht: a, b μ_1~~

$$\nu_n = \nu_0 \frac{(\nu_0\alpha t)^{n-1}}{[\underbrace{1+\nu_0\alpha t}_{z}]^{n+1}} = \nu_0\frac{z^{n-1}}{[1+z]^{n+1}} \qquad \Sigma = \nu_0 \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{d\nu_n}{2\alpha\, dt} = \nu_1\nu_{n-1} + \nu_2\nu_{n-2} + \cdots \left[\left(\nu_{\frac{n}{2}}\right)^2\right] - \nu_n \Sigma$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\nu_n}{dz} = \nu_0\left\{ \sum\left[\frac{z^{m-1}}{[1+z]^{m+1}}\frac{z^{n-m-1}}{[1+z]^{n-m+1}}\right] - \frac{z^{n-1}}{[1+z]^{n+1}}\frac{1}{1+z}\right\}$$

$$\frac{\nu_0}{2}\left\{\frac{(n-1)z^{n-2}}{[1+z]^{n+1}} - \frac{(n+1)z^{n-1}}{[1+z]^{n+2}}\right\} = \nearrow$$

$$\frac{1}{2}\left\{\underbrace{(n-1)\frac{1+z}{z} - (n+1)}\right\} = \underbrace{\sum_m \frac{z^{n-1}z^{n-m-1}}{(1+z)^{n-m}}} - z^{n-1}$$

$$\frac{n-1+\cancel{nz}-z-\cancel{nz}-z}{z}$$

$$\frac{n-1}{2z} - 1 \rightarrow = \sum_m \frac{z^n}{(1+z)^{n-m}} = \frac{z^n}{(1+z)^n}\sum_{m=1}^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\underbrace{(1+z)}_{y}{}^m - z^{n-1}$$

$$\frac{n-1}{2} - (y-1) = \frac{(y-1)^{n+1}}{y^n}\underbrace{\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}-1} y^m}_{y+y^2+y^3+\cdots\, y^{\frac{n-1}{2}-1} = \frac{y^{\frac{n-1}{2}}-y}{1-y}} - (y-1)^{n-1} \qquad n \text{ ungerade}$$

Dessen so:

$$\frac{1}{2a}\frac{dv_n}{dt} = \frac{v_1 v_{n-1} + v_2 v_{n-2} + v_3 v_{n-3} + \cdots \; v_{n-2} v_2 + v_{n-1} v_1}{2} - v_n \sum v$$

Dann wird:

$$\cancel{\frac{n-1}{2} - (y-1) = \frac{1}{2}\frac{(y-1)^{n+1}}{y^n} \sum_1^{n-1} y^n - (y-1)^{n-1}}$$

$$\underbrace{y^1 + y^2 + y^3 + \cdots + y^{n-1}}$$

$$\frac{y^1 - y^n}{1-y} = \frac{y(1-y^{n-1})}{1-y}$$

$$\cancel{=(y-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{(y-1)^2 y (1-y^{n-1})}{1-y} - 1\right\}}$$

$$v_n = v_0 \frac{2^{n-1}}{[1+z]^{n+1}} = \frac{v_0}{2^2}\Big(\underbrace{\frac{2}{1+z}}_{x}\Big)^{n+1}$$

$$M = v_1 v_{n-1} + \cdots \quad v_{n-1} v_1 = \left(\frac{v_0}{2^2}\right)^2 \Big[\underbrace{x^2 x^n + x^3 x^{n-1} + x^4 x^{n-2} + \cdots \; x^n x^2}_{(n-1)\, x^{n+2}}\Big]$$

$$= v_0^2 \frac{(n-1) \cdot 2^{n+2}}{2^4 \, (1+z)^{n+2}}$$

$$\frac{dv_n}{dz} = \frac{M}{v_0} - 2\frac{v_0}{2^2}\left(\frac{2}{1+z}\right)^{n+1}\frac{1}{1+z}$$

$$\frac{(n-1)\, 2^{n-2}}{(1+z)^{n+1}} - \frac{(n+1)\, 2^{n-1}}{(1+z)^{n+2}} = \frac{(n-1)\, z^n}{2^2 \, (1+z)^{n+2}} - 2\frac{1}{2^2}\frac{2^{n+1}}{(1+z)^{n+2}}$$

$$\frac{(n-1)(1+z)}{2^2} - \frac{(n+1)}{2} = \frac{(n-1)}{2^2} - \frac{z}{2}$$

$$(n-1)(1+z) - 2(n+1) = n - 1 - 2z$$

$$n + \cancel{nz} - 1 - z - \cancel{nz} - z =$$

$$n - 1 - 2z$$

Stimmt !!

	t	t_m		1/60	
52'5	0	0		0	
5?0	[illegible]	5'56	2'78	20	1?
[illegible]	[illegible]	13'75	2'75	7?5	1?
590	10	25	2'?	1?0	1?
[illegible]	15	45	[illegible]		
[illegible]	20	59	2'7		
[illegible]	30	79	2'6?		
[illegible]	40	1??'5	2'?		
[illegible]	50	118	2'3?		
[illegible]	60	127	[illegible]		
[illegible]	75		[illegible]		
[illegible]	80				

850
16

990
495
2475
106425

	h				
52'5	0				
62'5	[illegible]	[illegible]	15	3	[illegible]
52?	10	[illegible]	25	[illegible]	95
[illegible]	15	[illegible]	3?'7	2'4	[illegible]
[illegible]	20	[illegible]	4?5	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2'?	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	85	2'1	[illegible]
[illegible]	30	[illegible]	[illegible]	2'1	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2'1	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]
5??	90	[illegible]			[illegible]
[illegible]	10?	[illegible]			[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]			5'5
[illegible]	[illegible]	233			5'52
[illegible]	[illegible]	[illegible]			5'5?
[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]

1184
592
296
1273

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta + T}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\vartheta = T = 54 \text{ wk}$$

27 wk. $\left(\frac{\frac{T}{2}}{T+\frac{T}{2}}\right)^3 = \frac{1}{27} = 0{\cdot}037$

exp $0{\cdot}044$

13 wk $\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}\right)^3 = \frac{1}{125}$ $0{\cdot}008$

104 wk.

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 0{\cdot}3$

[illegible]	[illegible]	t_4	$t_{3\cdot 35}$	
52·5	52·[illegible]	0	0	
[illegible]	5[illegible]	2	17·[illegible]	8·6
18 [illegible]·2	[illegible]	5	30	[illegible]
[illegible]	[illegible]	10	6[illegible]	[illegible]
	6·[illegible]	15	[illegible]	5·[illegible]

KCl[illegible]

52·[illegible]	0	0	
51·[illegible]	2	3	1·5
[illegible]	5	1[illegible]·2	2·2
54·[illegible]	10	2[illegible]·[illegible]	2·[illegible]
55·7	15	[illegible]	2·[illegible]
[illegible]	22	[illegible]	2·7
58·[illegible]	[illegible]	[illegible]	2·5
[illegible]·5	[illegible]	105	2·[illegible]
6[illegible]	[illegible]	1[illegible]6	2·[illegible]
[illegible]	90	[illegible]	2·5
61·[illegible]	75	[illegible]	2·3
6[illegible]	90	130	2·[illegible]
[illegible]	105	[illegible]	2·[illegible]

	$t_{[illegible]}$	t_{10}	[illegible]	
50·2	0	0		
51·[illegible]	5	1[illegible]·3	3·[illegible]	7/15
52·[illegible]	10	4[illegible]·3	[illegible]	
[illegible]	20	90·[illegible]	[illegible]	
6[illegible]	30	139	[illegible]·6	
[illegible]	40	155·3	[illegible]9	
[illegible]	[illegible]	1[illegible]	3·7	
[illegible]	[illegible]	205	[illegible]·4	
[illegible]	70	2[illegible]	[illegible]	

$\frac{dp}{dz} = -\rho g$ $\qquad \int_{p_1}^{p} \frac{dp}{\rho} = -gz$

gz

$\cancel{\left(p + \frac{a}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{\rho} - b\right) = RT}$

$(p + a\rho^2)\left(\frac{1}{\rho} - b\right) = RT$

$\frac{p}{\rho} + a\rho - bp + \cancel{ab\rho} = RT$

$p = \frac{RT}{\frac{1}{\rho} - b} - a\rho^2$

$p = \frac{RT\rho}{1 - b\rho} - a\rho^2$

$$dp = d\rho\left\{\underbrace{\frac{RT}{1-b\rho} + \frac{RT\,b\rho}{(1-b\rho)^2}}_{\frac{RT}{(1-b\rho)^2}} - 2a\rho\right\}$$

$$\int\frac{dp}{\rho} = \int\frac{d\rho}{\rho}\,\frac{RT}{[1-b\rho]^2} - \int 2a\,d\rho = -gz$$

$$\cancel{RT\int d\rho\,\frac{1}{\rho} + \frac{b}{2}\left[\frac{1}{1+b\rho} - \frac{1}{1-b\rho}\right] - \frac{b}{2}\left[\frac{1}{1-b\rho} - \frac{1}{1+b\rho}\right]}$$

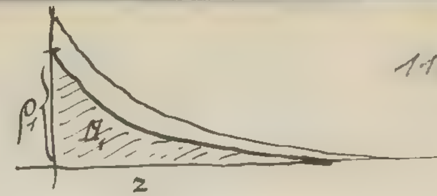
$$\cancel{\frac{1}{\rho}\ \frac{2b}{(1-b\rho)^2} \qquad \frac{b\rho}{(1-b\rho)^2}}$$

$$\cancel{\frac{1}{\rho} + \frac{b}{2}\,\frac{1}{1-b\rho} + \frac{3b}{2}\,\frac{1}{1+b\rho} = \frac{\quad}{\rho(1-b\rho)}}$$

$$\int\frac{1}{x}\,\frac{1}{(1-bx)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2b}{(1-bx)^2} - \frac{b^2x}{(1-bx)^2} = \frac{(1-bx)^2 + 2bx - b^2x^2}{x(1-bx)^2}$$

$$= \int\frac{1}{x} + \int\frac{b}{(1-bx)^2} + \int\frac{b}{1-bx} = \lg x + \frac{1}{1-bx} - \lg(1-bx)$$

$$-gz = RT\left\{\lg\frac{\rho}{1-b\rho}+\frac{1}{1-b\rho}\right\}\Big|_{\rho_1}^{\rho} - 2a\rho\Big|_{\rho_1}^{\rho}$$



$$M_1 = \cancel{\ldots} = q\int_{\rho_1}^{\infty}\rho\, dz$$

$$\frac{P^{M_2}}{\pi M_1} = \int_1^2 p\,dv = pv\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,dp - p_1(v_2-v_1) \qquad \begin{pmatrix}\rho_1 = f(M_1)\\ \rho_2 = f(M_2)\end{pmatrix}$$

$$-\int p_1\,dv$$

$$\cancel{P_2 = \ldots}$$

$$\left[\frac{RT}{1-b\rho}-a\rho\right]\Big|_1^2 - RT\left[\lg\frac{\rho}{1-b\rho}+\frac{1}{1-b\rho}\right]_1^2 + 2a\rho\Big|_1^2 - p_1\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)$$

$$= -RT\,\lg\frac{\rho}{1-b\rho}\Big|_1^2 + a\rho\Big|_1^2 - \frac{RT\rho_1}{1-b\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right) + a\rho_1^2\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)$$

$$M_1 = q\int_{\rho_1}^{\infty}\rho\,dz = -\frac{q}{g}\left\{\int_{\rho_1}^{\rho_\infty} RT\frac{d\rho}{[1-b\rho]^2} - \int_{\rho_1}^{\rho_\infty}2a\rho\,d\rho\right\} = -\frac{q}{g}\left\{\frac{RT}{b}\,\frac{1}{1-b\rho} - a\rho^2\right\}\Big|_{\rho_1}^{0}$$

$$= \frac{q}{g}\left\{\frac{RT}{b}\left[\frac{1}{1-b\rho_1} - 1\right] - a\rho_1^2\right\} = \frac{q}{g}\left\{\frac{RT\rho_1}{1-b\rho_1} - a\rho_1^2\right\}$$

$\rho_2 = \rho_1(1+\delta)$

$$\Delta P_1 = -RT\,\lg(1+\delta) + RT\,\underbrace{\lg\left(\frac{1-b\rho_1(1+\delta)}{1-b\rho_1}\right)}_{\lg\left[1-\frac{b\rho_1\delta}{1-b\rho_1}\right]} + a\rho_1\delta - \underbrace{\frac{RT}{1-b\rho_1}\left(\frac{1}{1+\delta}-1\right)}_{} + a\rho_1\left(\frac{1}{1+\delta}-1\right)$$

$$= -RT\left(\delta-\frac{\delta^2}{2}\right) - RT\,\frac{b\rho_1\delta}{1-b\rho_1} - RT\frac{1}{2}\left(\frac{b\rho_1\delta}{1-b\rho_1}\right)^2 + a\rho_1\delta + \frac{RT\left(\delta-\frac{\delta^2}{1}\right)}{1-b\rho_1} + a\rho_1\left(-\delta+\frac{\delta^2}{1}\right)$$

$$= RT\frac{\delta^2}{2}\left\{1 - \frac{b^2\rho_1^2}{(1-b\rho_1)^2} - \frac{2}{1-b\rho_1}\right\} + a\rho_1\delta - a\rho_1\delta + a\rho_1\delta^2$$

$$\frac{1+\cancel{b^2\rho^2}-\cancel{2b\rho_1}-\cancel{b^2\rho^2}-2+\cancel{2b\rho_1}}{(1-b\rho_1)^2} \qquad = a\rho_1\delta^2 - \frac{RT\frac{\delta^2}{2}}{(1-b\rho_1)^2} = -\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_1$$

$$W(\delta, d\delta) = A\, e^{\underbrace{-\frac{N}{HT}\, Nm\, \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_1}_{\gamma}}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \beta$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} = \beta$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\rho_1 \beta}$$

unter Annahme Boyle'S. $\frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho} = RT = \frac{1}{m}\,\frac{HT}{N}$

$$\gamma = +\frac{N}{HT}\, Nm\, \frac{\delta^2}{2}\,\frac{HT}{N} = N\frac{\delta^2}{2}$$ stimmt!

Warum ist das Niveau 0 ausgezeichnet $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_1$? Weil Annahme: Gleichgewichtsstörung gegen ρ_1) (=konst.

Dagegen falls gleichförmige Kompression der ganzen Säule

Arbeit: $\frac{\delta^2}{2}\int\left(\frac{dp}{d\rho}\right)\rho\, dz$

Arbeit pro Raumeinheit $\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)$

$\sum$ Arbeiten bei Zerstörung d... $= g\,\frac{\delta^2}{2}\int\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_z \rho_z\, dz$

Im Fall B. S. : $g\,\frac{\delta^2}{2}\int \rho\, dz \cdot RT = \frac{\delta^2}{2} RT\, Nm = \frac{\delta^2}{2}\,\frac{HT}{N} N$ stimmt!

$$g\, dz = -d\rho\left\{\frac{RT}{\rho[1-b\rho]^2} - 2a\right\}$$

$$\sum ? = g\,\frac{\delta^2}{2g}\int \frac{dp}{d\rho}\, d\rho\left\{\frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho\right\} = g\,\frac{\delta^2}{2g}\int_{\rho_1}^{\infty}\left[\frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho\right]^2 d\rho$$

$$\left[\cancel{\frac{(RT)^2 - \frac{2a}{b}(b\rho)^2 + \frac{2a}{b}(1-b\rho)}{[1-b\rho]^2}}\right]^2 = \int \frac{(RT)^2}{(1-b\rho)^4} - \frac{RT\, 4a\rho}{(1-b\rho)^2} + 4a^2\rho^2\, d\rho$$

$1-b\rho = \alpha$ $\quad + \int -\frac{d\alpha}{\alpha^4}\frac{(RT)^2}{b} - \frac{4aRT}{b}\frac{1}{(1-b\rho)^2} + \frac{4aRT}{b}\frac{1}{1-b\rho} + 4a^2\rho^2 \Big] d\rho$

$-b\,d\rho = d\alpha$

$$+\frac{4aRT}{b^2}\left[\frac{d\alpha}{\alpha^2} - \frac{d\alpha}{\alpha}\right] + 4a^2\rho^2 d\rho$$

$$\Sigma P = \left[\frac{(RT)^2}{3b}\frac{1}{(1-b\rho)^3} - \frac{4aRT}{b^2}\left[\frac{1}{1-b\rho} + \lg(1-b\rho)\right] + \frac{4}{3}a^2\rho^3\right]_{\rho_1}^{0} \frac{\varrho\delta^2}{2\varrho}$$

$$\cancel{\frac{b}{(1-b\rho)^2} - \frac{b}{1-b\rho}}$$

$$= \left\{\frac{(RT)^2}{3b}\left[\frac{-1}{(1-b\rho_1)^3} + 1\right] + \frac{4aRT}{b^2}\left[\frac{1}{1-b\rho_1} - 1 + \lg(1-b\rho_1)\right] - \frac{4}{3}a^2\rho_1^3\right\}\frac{\varrho\delta^2}{2\varrho}$$

$$= M_1\frac{\delta^2}{2}\frac{\{\qquad\qquad\}}{\frac{RT\rho_1}{1-b\rho_1} - a\rho_1^2}$$

wenn $b\rho_1 \ll 1 = \beta$ $\qquad \frac{1}{(1-\beta)^3} = 1 + 3\beta + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}\beta^2 \quad + \beta^2 + [-\beta + \frac{\beta^2}{2}]$

$$\Sigma P = M_1\frac{\delta^2}{2}\frac{\frac{(RT)^2}{3b}\left[-3b\rho_1 - 6(b\rho_1)^2\right] + 4aRT\frac{\rho_1^2}{2} - \frac{4}{3}a^2\rho_1^3}{RT\rho_1\left[1 + b\rho_1 - (b\rho_1)^2\right] - a\rho_1^2}$$

$$= M_1\frac{\delta^2}{2}\frac{-(RT)^2\left[\rho_1 + 2b\rho_1^2\right] + 2RTa\rho_1^2 - \frac{4}{3}a^2\rho_1^3}{}$$

$$= M_1\frac{\delta^2}{2}\frac{-\left[1 + 2b\rho_1\right] + 2\frac{a\rho_1}{RT}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{a\rho_1}{RT}\right]}{1 + b\rho_1 - (b\rho_1)^2 - \frac{a\rho_1}{RT}}RT$$

$$= -M_1\frac{\delta^2}{2}RT\frac{1 + 2\beta - 2\alpha - \frac{4}{3}\alpha^2}{\underbrace{1 + \beta - \beta^2 - \alpha}_{1 + 2\beta - 2\alpha - \qquad + (\alpha - \beta)}} \neq -M_1\frac{\delta^2}{2}RT\left[1 - \alpha + \beta\right]$$

$$= -M_1\frac{\delta^2}{2}RT\left[1 - \frac{a\rho_1}{RT} + b\rho_1\right]$$

während oben gefunden war: $-\frac{\delta^2}{2}RT\left[1 + 2b\rho_1 - \frac{2a\rho_1}{RT}\right]$

$$M_1 = m\,N = \frac{\cancel{gq}}{g}\left\{\frac{RT}{1-b\rho_1} - a\rho_1\right\} =$$

$$\frac{m\,N\,g}{q\,RT} = \rho_1\left\{1 + b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right\}$$

$$RT = \frac{1}{m}\,\frac{HT}{N}$$

$$\frac{m^2 N g}{q\,\frac{HT}{N}} = \rho_1\left[1 + b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right]$$

$$\frac{m\,\frac{l}{t^2}}{l^2\frac{l^2}{t^2}} = \frac{m}{l^3} \quad (D)$$

$$\Sigma P = -M_1\,\frac{\delta^2}{2}\,RT\left[1 + b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right]$$

$$\Sigma P = -M_1\,\frac{\delta^2}{2}\,\cancel{RT}\,\frac{\cancel{m\,N\,g}}{q\,\cancel{RT}\,\rho_1}\,M_1 = -\frac{(M_1\,\delta)^2}{2\rho_1 q}$$

$$\frac{HT}{N}\,\Sigma P = -N\,\frac{\delta^2}{2}\left[1 + b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right]$$

$$\frac{dp}{d\rho_1} = RT\left[1 + 2b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right]$$

$$= -N\,\frac{\delta^2}{2}\,\frac{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{1/2}}{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{13}}$$

$$RT\left[1 + b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right] = \frac{dp}{d\rho_{1/2}} \qquad \rho_{1/2} = \frac{\rho_1}{2}$$

$$\rho_1 = \frac{m^2 N g}{q\,\frac{HT}{N}}\left[1 + \left(\frac{a}{RT} - b\right)\frac{m^2 N g}{q\,\frac{HT}{V}}\right]$$

$$\frac{\overline{\delta^2}}{N} = \frac{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{13}}{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{1/2}}$$

$$\frac{m^2 N g}{q\,\frac{HT}{N}}\,RT = \rho_1\,\frac{dp}{d\rho_{1/2}}$$

$$\rho_1 = \frac{m\,N\,g}{q}\,\frac{1}{\frac{dp}{d\rho_{1/2}}} = \frac{m\,N\,g\left(1 - \frac{\rho}{\rho s}\right)}{q}\,\frac{1}{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{1/2}}$$

$$\frac{\int \delta^2 e^{-\alpha\delta^2}\,d\delta}{\int e^{-\alpha\delta^2}\,d\delta} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nu}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\,d\delta = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\nu}{2}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}$$

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_1 = RT\left[1+2b\rho - 2\frac{a\rho_1}{RT}\right]$$

$$\rho_1\left[1+b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right]RT = \frac{Mg}{g}$$

$$\rho_1 \frac{dp}{d\rho_1} = \frac{Mg}{g}\left[1+b\rho_1 - \frac{a\rho_1}{RT}\right]$$

$$\cancel{\tfrac{N}{HT}}\,\Sigma P = -M_1 \frac{\delta^2}{2} RT\left[1+b\rho_1 \frac{a\rho_1}{RT}\right]$$

$$\Sigma P = -\frac{\delta^2}{2} RT \frac{g}{g}\left(\rho\frac{dp}{d\rho}\right)_1$$

$$\frac{N}{HT}\Sigma P = -\frac{\delta^2}{2}\frac{g}{gm}\left(\rho\frac{dp}{d\rho}\right)_1$$

$$\to -\frac{\delta^2}{2}\frac{g}{gm}\cancel{\tfrac{\beta_1}{\beta}}\underbrace{\left(\rho\frac{dp}{d\rho}\right)_\beta}_{=p=\frac{Nmg}{g}}$$

$$\left(\rho\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_\beta = RT\rho = p$$

$$\boxed{= -\frac{\delta^2}{2}N\cancel{\tfrac{\beta_1}{\beta}}}$$

$$\beta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$$

für gegebenes n:

$$\frac{\sum'(m-n)H(n,m)}{N} = \frac{\sum' m\,H(n,m) - n\sum H(n,m)}{N} = \frac{\sum m\,H(n,m)}{N} - n$$

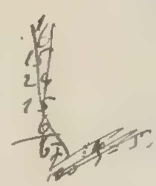
572

$v = 1{\cdot}428$

$P = 0{\cdot}375$ bis 5729

0·3940 bis.

126	281	138	20	2	4
70	234	216	152	28	30
21	87	189	114	66	40
5	9	64	96	52	5
		15	30	55	12
				18	14



222	611	622	412	221	105
379	563	355	174	67	28
3464	7860	~~8505~~ 7938	6149	3444	~~0455~~ 5212
5786	7505	5502	2405	8261	4472
7678	8355	3436 ~~3088~~	3744	5183	5984
0·5858	10853	1·7525 ~~2034~~	2·368	3·298	5·770 ~~3·964~~ 5·15
	−1·0	2·0	−3·	−4	−5

−0·534	+0·586	−0·052
−0·160	+0·085	+0·075
+0·214	−0·2475	+0·033
+0·588	−0·632	+0·074
+0·962	−0·702	−0·260
+1·336	~~−1·036~~	−0·300

+0·586	+0·085	~~+0·034~~	−0·632	−0·702	~~−1·036~~ 1·25
1547	6314	−0·2475	1965	4102	5529
5729	5729	7574	5729	5729	5729
7276	2043	5729	7694	9831	1258
		3303			

$$\frac{\frac{4a}{3}}{\cancel{4\cdot 1}}\ \frac{\pi}{C}\sqrt{\frac{3}{\nu}}\ e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

$$T = \frac{a}{3}\ \frac{\sqrt{6\pi}}{C.2\nu}\ \cancel{\sqrt{\frac{\;}{2\nu\pi}}\ e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}}$$

$$= \frac{a}{2C\nu\sqrt{3\nu}}$$

$$\frac{e^{-\nu}\,\nu^{n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}}$$

$$\frac{e^{n-\nu}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{n}}{\sqrt{2\pi n}} = e^{+\nu\delta}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\nu(1+\delta)}$$

$$T = \frac{a}{3}\ \frac{\sqrt{6\pi}}{\underbrace{C.2\nu}}\ \sqrt{2\nu\pi}\ e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

$$\nu\delta - \nu(1+\delta)\left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) = \frac{e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$= \frac{a\sqrt{\pi}}{C\nu\sqrt{6}}$$

$$\cancel{a}\sqrt{\frac{\pi}{6\pi}}\ \ \frac{10^{-4}\cdot\cancel{4}}{4{\cdot}8\,.\,3.10^{19}\cdot\cancel{4a^2}}$$

$$\cancel{\frac{3.10^{19}}{8}\ 10^{-5}}$$

$$T_1 = \frac{10^{-23}}{a^2.\,4{\cdot}8\sqrt{6\pi}}$$

$$= \frac{10^{-25}\cdot 4{\cdot}8}{a^2}$$

49715
7782
1·2754
0·0377
0·6812
1·3189
0·6811 −2

$$\frac{\sqrt{2\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}a^3\pi.\frac{\cancel{3}10^{19}}{\cancel{4}}.\pi}\ e^{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}a^3\pi\frac{\cancel{3}10^{15}}{2\cancel{4}}}}{\pi\sqrt{2.10^{19}a^3}\ .\ e^{\frac{a^3\pi.10^{15}}{2}}}$$

$a = 10^{-5}$

$$\pi\sqrt{2.10^{4}}\ e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{4{\cdot}8\pi\sqrt{20}.\cancel{10^{-15}}}{\sqrt{a}}\ e^{\frac{a^3\pi 10^{15}}{2}}\quad 10^{-16}$$

~~4073~~

$a = 5.10^{-5}$ $\quad \frac{125\pi}{2}$

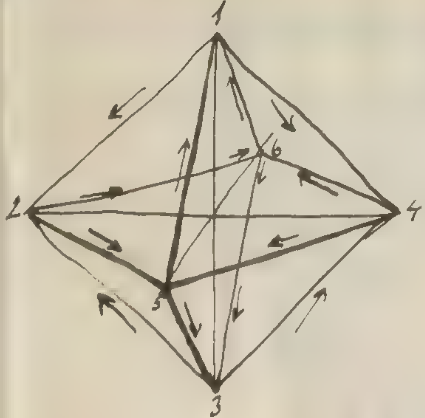
·0·6515
81·44
−12
+69

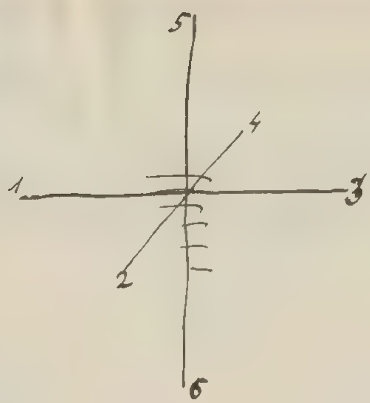
$$4{\cdot}8\pi.\sqrt{\frac{2}{5}}\ 10^{-13}$$

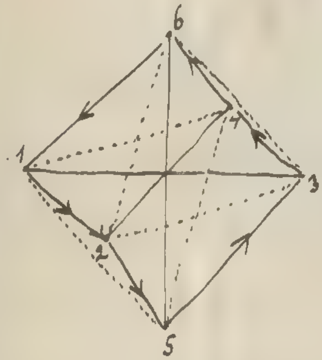
0·4343.	
0·21715.	
1413	
6515	
2.7	
87	
2	70·0
0·6821	
2·4971	
0·1505	
0·6812	−15
4·0109	−15

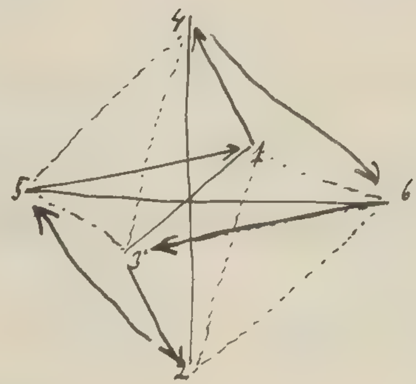
$= 10^{-11}$

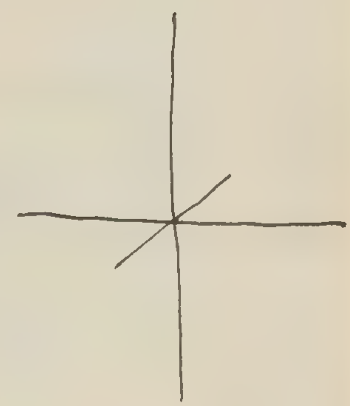
$a = \cancel{\;}\ 2{\cdot}5.10^{-5}$ $\quad$ 10·18











Im Falle kontinuierlicher Variabeln, wie z.B. Teilchen im Sedimentationsfeld

ist Wiederkehrzeit nur definiert, falls Grösse der Abschnitte gegeben ist, innerhalb welcher (~~Aufenthaltsort~~ Zustand) d. Systems als identisch angesehen wird.

z.B.
$$W(x_0\, x\, t)\, dx = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left\{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}}\right\} e^{-\frac{c(x-x_0)}{2D} - \frac{c^2 t}{4D}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{cx}{D}} \int\limits_{\frac{x+x_0+ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz\right] dx$$

Dann handelt es sich um die Grösse

$W_u(0)$ und $W(n)$

$$W(n) = \frac{c}{D}\int_x^{x+\Delta} e^{-\frac{cx}{D}}\, dx$$

$$W_u(0) = \int_x^{x+\Delta} dx_0\, \frac{c}{D}\, e^{-\frac{cx_0}{D}} \underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{x} W(x_0\, x\, t)\, dx + \int_{x+\Delta}^{+\infty} W(x_0\, x\, t)\, dx\right\}}_{= 1 - \int_x^{x+\Delta} W(x_0, x, t)\, dx}$$

oder aber man könnte Wiederkehrzeit aufsuchen dafür dass die Variable $x > X$

also
$$W(n) = \frac{c}{D}\int_X^{\infty} e^{-\frac{cx}{D}}\, dx$$

$$W_u(0) = \int_X^{\infty} dx_0\, \frac{c}{D}\, e^{-\frac{cx_0}{D}} \int_{-\infty}^{X} W(x_0\, x\, t)\, dx$$

Es gilt wieder die Reversibilität:

$$e^{-\frac{c x_0}{D}} W(x_0\, x\, t) = e^{-\frac{c x}{D}} W(x\, x_0\, t)$$

Allgemein $$\Theta + T = \tau \, \frac{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots + N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots}{\underbrace{M_1 + M_2 + M_3 + \dots}_{= N_1 + N_2 + N_3 + \dots}}$$

$$= \tau \left[\frac{1}{1 - W_u(0)} + \frac{1}{1 - W_m(0)} \right]$$

Kontrollieren, ob neuerl. Exponentialformel für Gas ~~...~~ d. Grenzfall bildet der Formel für sedimentiertes Kolloid, d. h. ob der Auftrieb ~~des~~ seitens des umgebenden Mediums zu berücksichtigen ist. Ich glaube wohl, denn nimmt das Molek. ein Volum ein, so ist V. d. W. Gleichg. zu verwenden: $p = \frac{RT}{v-b} =$

wird man die Konstitutionsglied v. etwa

$$v\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{v}{(v-b)^2} RT \frac{\partial v}{\partial x} = -g\mu$$

$$\frac{(u+b)}{u^2} \frac{du}{dx} = +\frac{g}{RT}$$

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{b}{u^2} \right) du = +\frac{gz}{RT}$$

$$\log u - \frac{b}{u} = {}^{\wedge}$$

$$\log(v-b) - \frac{b}{v-b} = {}^{\wedge}$$

$$= \log v - \frac{b}{v} - \frac{b^2}{2v^2} - \frac{b}{v} - \frac{b^2}{v^2}$$

$$= \log v \underbrace{- \frac{2b}{v} - \frac{3}{2}\frac{b^2}{v^2}}_{= \log\left(1 - \frac{2b}{v}\right)} = +\frac{gz}{RT}$$

$$\therefore \quad v = e^{\frac{gz}{RT}\left(1 - \frac{2b}{v}\right)}$$

stimmt

$$\log v + \text{const} = e^{-\frac{gz}{RT}} + \quad ?$$

zu erwarten wäre nach Analogie mit Sedimentationsgleichgewicht ein Exponent

$$\frac{N}{RT}\, g z \left(1 - \frac{2b}{v}\right)$$

natürlich nur genähert wegen Variabilität v.

Ezkker:

27

$W(q) = W(x) = W(x_0\, x\, t_0)$

$\tau f(q) =$

$\bar{R} = 0 \qquad \bar{R} = \overline{\Delta x}$

$\overline{\Delta^2} = \sqrt{\overline{\Delta x^2}} \qquad \overline{R^2} = \overline{\Delta x_n^2}$

Debye: $F(\alpha, \varepsilon)$ ← Von jed. Punkt α aus wird verschiedene ε Verschiebung zurückgelegt, Häufigkeit

$\frac{1}{2} \int F(\alpha, \xi)$

$\Delta^2 = 2\nu P$

$\overline{\Delta} = (n-\nu)P$

$\frac{\Delta^2}{t^2} = 2\,\frac{(\ )}{\Delta}$

$\frac{\overline{\Delta^2}}{\overline{x_0^2}} = 2$

$\int \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, \varepsilon)\,\varepsilon^2\, d\varepsilon}{2} = \frac{\partial}{\alpha}\left(F_{\alpha}\,\varepsilon^2\right)$

$\overline{\Delta^2_{x_0}} = \int W(x_0, x, t)\,(x-x_0)^2\, dx = \overline{x^2_{x_0,t}} - 2x_0 \overline{x}_{x_0 t} + x_0^2$

$\overline{\Delta^2} = \int W(x_0)\, dx_0 \cdot \overline{\Delta^2_{x_0}} = \iint H(x_0, x)\,(x-x_0)^2\, dx\, dx_0 = 2\iint H(x_0, x)\, x_0^2\, dx\, dx_0$

$- 2\iint H(x_0, x)\, x x_0\, dx\, dx_0$

$= \int \overline{x^2_{x_0 t}}\, W(x_0)\, dx_0 - 2\overline{x_0}\;\overline{x_{x_0 t}} + \overline{x_0^2}$

$\frac{\partial W}{\partial t}$

$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\Delta^2_{x_0}} = \int (x-x_0)^2 \left[D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 3\,\frac{\partial}{\partial x}(f\, W)\right] dx$

$W_{(x_0)}\, W(x_0 x t) = H(x_0, x, t)$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \beta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(H\, f(x)\right)$$

$$H = W(x_0, x, t)\; A\, e^{-\frac{N}{RT}\chi(x_0)}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_0} = f(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = \frac{\partial W}{\partial x_0}\cdot W_{(x_0)} - \frac{N}{RT}\, H \cdot f(x_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(x\, W) = D\, x\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta x\,\frac{\partial}{\partial x}(f W)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\bar{x} = D\left\{\cancel{x\frac{\partial W}{\partial x}} - \int W\, dx\right\} - \cancel{\beta x f W} + \beta \int f W\, dx$$

Ratnowsky - Debye.

$$\bar{m} = \frac{m^2}{3kT}\, X = \frac{(5 \cdot 10^{-18})^2}{3\,(6 \cdot 10^{23} \ 8 \cdot 10^{7} \cdot 300)}\, X = \frac{25 \cdot 10^{-36}}{12 \cdot \cancel{10} \cdot 10^{-14}} = 2 \cdot 10^{-22} \cdot X$$

Feld in Entfernung $x = 10^{-8}$: $\frac{\bar{m}}{x^3} = 200\, X$ somit weit stärker als äusseres Feld

im Mol. Abstand wesentlich

$$\bar{\rho} = \frac{\mu h^2}{N}\int_0^\infty e^{-\frac{\mu h^2}{N}\frac{\rho^2}{2}}\rho^2 d\rho = \frac{\sqrt{2}\sqrt{N}}{\mu h}\int e^{-x^2}x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\frac{\mu h}{\sqrt{2N}} = \frac{1}{\beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{N}\pi}{\mu h}$$

$$\bar{\rho}^2 = \frac{N\pi}{2\mu h^2} \qquad \int_{\bar{\rho}}^\infty \frac{\mu h^2}{N} e^{-\frac{\mu h^2}{N}\frac{\rho^2}{2}} \rho\, d\rho = e^{-\frac{\mu h^2}{N}\frac{\bar{\rho}^2}{2}}$$

$$\frac{\mu h^2}{N}\int_x^\infty e^{-\frac{\mu h^2}{N}\frac{\rho^2}{2}}\rho\, d\rho = e^{-\frac{\mu h^2}{N}\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{\bar{\rho}}\right)^2}$$

$$\frac{\Sigma_V}{V_0 - x} = \frac{1}{1+\beta t}$$

$$(2{\cdot}69 - x) = 1{\cdot}20\,(1+\beta.1320)$$

$$2{\cdot}69 - x = 2{\cdot}34\,(1+\beta.60)$$

$$\frac{V_0 - x}{V} = 1+\beta t$$

$$\beta.1260 = 1{\cdot}14$$

$$\beta = \frac{1{\cdot}14}{1260} = 0{\cdot}000\,905$$

$$x = 2{\cdot}69 - 2{\cdot}34\,[1{\cdot}05430]$$

21086
31629
4217
2{\cdot}4671

$x = 0{\cdot}22$

$V_0 - x = 2{\cdot}47$
2·34
2·25
2·02
1·69
1·47
1·36
1·20

3927	3927	3927	3927	3927	3927	3927
3692	3522	3054	2279	1673	1335	0792
0235	0405	0873	1648	2254	2592	3135
10555	10977	1223	1461	1680	1816	2058
925	814	929	1098	1133	907	800

$$\frac{q}{8}a\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2l+x}+\frac{1}{4l+x}+\cdots+\frac{1}{l-x}+\frac{1}{3l-x}+\frac{1}{5l-x}+\cdots\right]^{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q}{8}+\frac{q}{16}\right)a\left(\frac{1}{\frac{l}{4}}+\frac{1}{\frac{3l}{4}}\right)=\frac{a}{l}\,\frac{q}{16}\,\frac{3}{2}\cancel{+\frac{4}{3}}=4.5\,\frac{a}{l}$$

Tematy: 1). Artykuł o Kataphorezie – Elektrolyzie (uwagi Zsigmondy'ego)

Doppelschichten teorii

z drugiej strony hydratacya jonów $\bar{H}$, $\bar{OH}$ na podstawie ~~[illegible]~~ Debye'go teoryi

o dipolach elektrycznych

2). Wypracować uwagę o uogólnionym związku $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}=2\frac{\Delta\xi}{\xi}$

zastosować do promieniowania, porównać z Fokkerem i z Franckiem

3). Teorya skoagulowanych kolloidów siarki (von Odén) według analogii z Boltzmanna teoryi ciśnienia pary. Wytłomaczyć znaczenie równania Svedberga.

Kondensacya na kulistych jądrach „Zsigmondy'ego Keimmethode"

$$4\pi r^2\,dr = 4\pi D r\,dt$$

$$r\,dr = D\,dt$$

$$r^2 - r_0^2 = 2Dt$$

$$r^2 = r_0^2 + 2Dt$$

więc jeżeli ~~[illegible]~~ $r \gg r_0$, to r niezależne od r_0, zatem wielkość jąder kondensacyi obojętna, różnice mogłyby powstać wskutek nierównomierności w rozkładzie jąder (przypadkowe różnice gęstości) ale tem mniejszy wpływ tych wahań, czem dłuższy cały proces narastania trwa bo tem rzadziej konstelacye w tym czasie się zdarzą (jeżeli cząstki się złączą przy spotkaniu)

Boltzmann p. 169

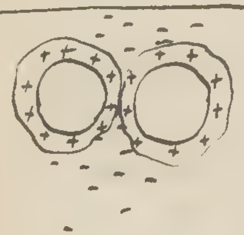
$$v_g = \left(v_f - 2b + \frac{17}{10}\frac{v^2}{v_f}\right) e^{\frac{2a}{rT}\left(\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_g}\right)} \neq \cancel{v_f \cdot e^{\frac{2a}{rTv_f}}}$$

Hauptsache ist jedenfalls nicht die Veränderlichkeit von T sondern des ganzen $e^{2h\varphi}$

Sondberg $\delta = e^{k(t-t_0)}$

$$\therefore \quad v_g = e^{k(t_0-t)} \neq v_f\, e^{-2h\overbrace{(\psi_f - \psi_g)}^{\Phi}}$$

$$k(t_0-t) = -2h\Phi + \eta v_f = \frac{1}{mRT}\Phi + \eta v_f$$



Schutzwirkung der elektr. Doppelschichten

Annahme: zwei Teilchen mit konstanter Oberflächendichte σ, eingetaucht in ein Ionen-Gas

$$U = E\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right] - \Phi$$

$$\underbrace{\Delta^2 U = -\Delta^2 \Phi = 4\pi\rho = \rho_0 e^{-hU}}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-hU}$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dv$$

Darüber wären vielleicht jedenfalls die Ladungen auf der Kugel nicht festsitzend, sondern verschiebbar, wie auf Leitern

Andere Art d. Schutzwirkung, wenn man ausser zwei ~~entgegengesetzten~~ verschiedenen (±) Ionen Arten annimmt, deren Anzahl ∞ ∞ Entfernung gegeben

---

Erklären sich die photoelektrischen Vorgänge v. P. Ehrenhaft [Bewegung (kleiner Teilchen) gegen die Lichtquelle zu] nicht durch ~~[illegible]~~ Verminderung d. Kapillaritätskonstante infolge Erwärmung auf der Vorderseite.

Oder durch Veränderung d. Doppelschichte infolge Kathodenstrahlung?

Doppelschicht Theorie (Versuch)

Gegeben sei die elektr. ~~...~~ Ladungsdichte an der Wand, somit $\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = A$

Eine derartige Wand sei in einen Elektrolyten eingetaucht:

$\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} =}$ $\cancel{\frac{d^2U}{dx^2} = -4\pi\varepsilon(n_+ - n_-) = -4\pi\varepsilon(\alpha_1 n_1 -}$

$\cancel{n_+ = n_0 e^{-hU}}$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -4\pi\varepsilon\,(c\, n_+ - a\, n_-)$$

$$\left.\begin{aligned} n_+ &= n_0\, e^{-chU} \\ n_- &= n_0\, e^{+ahU} \end{aligned}\right\}\quad n_+^{\frac{1}{c}}\, n_-^{\frac{1}{a}} = n_0^{\,2}$$

Im Falle einwertiger An- und Kationen:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -4\pi\varepsilon n_0\left[e^{-hU} - e^{hU}\right]$$

Abkürzung:

$$\int_0^x n_+\, dx = \mu_+$$

$$\frac{dU}{dx} = A - 4\pi\varepsilon\left[c\,\mu_+ - a\,\mu_-\right] = -\frac{1}{hz}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d\mu_+}{dx} = n_0\, z^{c}$$

$$\frac{d\mu_-}{dx} = n_0\, z^{-a}$$

$$\frac{dU}{dx}\Big|_0^x = -4\pi\varepsilon\int_0^x (c\, n_+ - a\, n_-)\,dx$$

$$U_\infty - U_0 = \int_0^\infty \frac{dU}{dx}\,dx$$

$$= \int_0^\infty\left[A - 4\pi\varepsilon\int_0^x (c n_+ - a n_-)\,d\xi\right]dx$$

Abkürzung:

$$e^{-hU} = z$$

$$U = -\frac{1}{h}\lg z$$

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{hz}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{hz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{1}{hz}\,\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$n_- = \frac{n_0^{2a}}{n_+^{\frac{a}{c}}}$$

$$\mu_- = \int_0^x n_0^{2a}\cdot n_+^{-\frac{a}{c}}\,dx$$

$=$

~~Dessau~~ Gouy:

$$\rho = \varepsilon(c\,n_c - a\,n_a) = -\frac{1}{4\pi}\frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{dq}{dx}$$

$$q = \int_x^\infty \rho\,dx = +\frac{1}{4\pi}\frac{dU}{dx}\Big|_x$$

$$U_\infty - U_0 = 4\pi\int_0^\infty q\,dx = 4\pi\Big\{ + \int_0^\infty x\rho\,dx\Big\} = 4\pi\,\xi\underbrace{\int_0^\infty \rho\,dx}_{A}$$

Schwerpunkts-Kondition

$$n_c = n_{c\infty}\,e^{-chU} \qquad n_a = n_{a\infty}\,e^{ahU}$$

$$hU = \frac{1}{c}\lg\frac{n_{c\infty}}{n_c} = \frac{1}{a}\lg\frac{n_a}{n_{a\infty}}$$

$$4\pi h q = h\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{c\,n_c}\frac{dn_c}{dx} = \frac{1}{a\,n_a}\frac{dn_a}{dx}$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi h q\; c n_c &= -\frac{dn_c}{dx} \\ 4\pi h q\; a n_a &= \frac{dn_a}{dx}\end{aligned}\right\}$$

$$4\pi h q(c n_c - a n_a) = -4\pi h q\frac{dq}{dx} = -\frac{d(n_c+n_a)}{dx}$$

$$n_c + n_a = +2\pi h q^2 + \text{const}$$

$$+2\pi h q^2 = n_c + n_a - n_{c\infty} - n_{a\infty}$$

$\boxed{c = a}$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{hCnc}}\left\{\lg\frac{\sqrt{n_{c0}} - \sqrt{n_\infty}}{\sqrt{n_c} - \sqrt{n_\infty}} - \lg\frac{\sqrt{n_{c0}} + \sqrt{n_\infty}}{\sqrt{n_c} + \sqrt{n_\infty}}\right\}$$

$$n_c - n_{c\infty} + n_a - n_{a\infty} = 2\pi h q^2 \qquad \frac{n_c}{n_{c\infty}} = \frac{1}{z} \qquad \frac{n_a}{n_{a\infty}} = z^{\frac{a}{c}}$$

$$n\left(\frac{1}{z} - 1\right) + z^{\frac{a}{c}} - 1 = \frac{2\pi h q^2}{n_{a\infty}} \qquad \frac{n_{c\infty}}{n_{a\infty}} = \frac{a}{c} = n$$

$$z^{n+1} - z\left[n + 1 + 2\pi h q^2\right] + n = 0$$

$$\underline{z_\infty = 1}$$

$$hU = \frac{1}{c}\lg z$$

$$h\left[U_\infty - U_0\right] = \frac{1}{c}\lg\left[\frac{z_\infty}{z_0}\right] = -\frac{1}{c}\lg z_0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\varrho_0}\,\frac{KRT}{4\pi n \nu_c}\,\lg U_{c0} \qquad \varrho_0 = \text{Charge} = \int_0^\infty \rho\,dx = \text{const}$$

$m = 2{,}9 \cdot 10^{14}$

$C = 10^{-10}$ (eau mure)

$K = 80$

$R = 8{,}3 \cdot 10^{7}$ || $T = 300$

$$\frac{4\pi}{K}\,\varepsilon\,\varrho_0 = \Phi_\infty - \Phi_0 = \frac{RT}{m\nu_c}\lg U_{c0} = -\frac{RT}{m\nu_a}\lg U_{a0}$$

$\int_0^\infty x\frac{d\varrho}{dx}dx$

$$U_{c0} = \frac{1}{z_0} \qquad U_{a0} = z_0^n$$

$$\beta = \frac{\pi}{10^{-10} \cdot 80 \cdot 8{,}3 \cdot 10^7 \cdot 300} = \frac{\pi}{8{,}25} = \frac{\pi}{200}$$

$$z^{n+1} - z\left(n+1 + \frac{2\pi\nu_a}{CKRT}\varrho^2\right) + n = 0$$

$$(z-1)^2 = 2z\frac{\pi}{CKRT}\varrho^2 \quad \| \quad \varrho = \frac{z-1}{\sqrt{2z\pi}}$$

Einwertig: $n = 1$

$\nu_a = \nu_c = 1$

$$z^2 - 2z\left(1 + \frac{\pi}{CKRT}\varrho^2\right) + 1 = 0$$

$$z = 1 + \underbrace{\frac{\pi}{CKRT}}_{\beta}\varrho^2 \pm \sqrt{2\beta\varrho^2 + \beta^2\varrho^4}$$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{RT}{m}\lg\left[1 + \beta\varrho_0^2 \pm \sqrt{2\beta\varrho_0^2 + \beta^2\varrho_0^4}\right]$$

$$1 + \alpha - \sqrt{2\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} = 1 + \alpha - \sqrt{2\alpha} - \frac{\alpha}{4}\sqrt{2\alpha}$$

$$\Delta\varphi \neq \frac{RT}{m}\sqrt{2\alpha} = \frac{RT}{m}\varrho\sqrt{\frac{2\pi}{CKRT}}$$

Zweiwertig: $n = 2$

$\nu_c = 2$; $\nu_a = 1$

$$z^3 - z\left(3 + \frac{2\pi}{CKRT}\varrho^2\right) + 2 = 0$$

$$\frac{25 \cdot 10^9}{2{,}9 \cdot 10^{14}} \cdot \varrho \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{200}}$$

$\frac{1}{133}$ || $\varrho = \frac{1}{10}$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{2RT}{m}\lg z_0$$

$z = 1 + x$

$$(1+x)^3 - (1+x)(3 + 2\alpha) + 2 = 0$$

$$\cancel{1} + \cancel{3x} + 3x^2 - [\cancel{3} + 2\alpha + \cancel{3x} + \cancel{2\alpha x}] + \cancel{2} = 0$$

$$x \neq \sqrt{\frac{2\alpha}{3}}$$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{2RT}{m}\sqrt{\frac{2\alpha}{3}} =$$

$$= \frac{2RT}{m}\varrho\sqrt{\frac{4\pi}{3CKRT}}$$

also wird der Unterschied zwischen ein und zweiwertigen Ionen gar nicht zum Vorschein kommen!

Auch ist die Möglichkeit einer Umladung ausgeschlossen

Einfluss eines elektrischen Feldes auf Zähigkeit

unter Annahme dass die Flüssigkeitsmolekeln Dipole sind (Debye, Reinganum)

Abschätzung des Einflusses:

Wenn Kraft auf Dipol $= X$
m = Dipolmoment
so ist Verteilung der Axen:

$$F(\alpha)\,d\alpha = C\, e^{\frac{mX}{kT}\cos\alpha}\, d\alpha$$

Durchschnittl. Moment in X:

$$m\frac{\int \cos\alpha\; 2\pi\sin\alpha\, d\alpha \cdot F(\alpha)}{\int 2\pi F(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha} = m\frac{\int_0^\pi e^{\beta\cos\alpha}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha}{\int_0^\pi e^{\beta\cos\alpha}\sin\alpha\, d\alpha}$$

$$= \frac{m}{\beta}\,\frac{\int_{-\beta}^{+\beta} e^{x}\, x\, dx}{\int_{-\beta}^{+\beta} e^{x}\, dx} \qquad \int_{-\beta}^{+\beta} e^{\alpha x}\, dx = \frac{e^{\alpha\beta}-e^{-\alpha\beta}}{\alpha}$$

$$\int x\, e^{\alpha x}\, dx = \left\{-\frac{e^{\alpha\beta}-e^{-\alpha\beta}}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha}\left[e^{\alpha\beta}+e^{-\alpha\beta}\right]\right\}$$

$$= \frac{m}{\beta}\,\frac{-e^{\beta}+e^{-\beta}+\beta e^{\beta}+\beta e^{-\beta}}{e^{\beta}-e^{-\beta}} = \frac{m}{\beta}\left\{\beta\,\frac{1+e^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - 1\right\}$$

$$\bar{m} = m\left[\frac{1+e^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{1}{\beta}\right] \qquad \beta = \frac{mX}{kT} \qquad = m\,\frac{\cancel{2}\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)}{\cancel{2}\left(\beta+\frac{\beta^3}{2\cdot 3}\right)} = \frac{m}{\beta}\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right)$$

$$\bar{m} = \frac{m\beta}{3}$$

Falls Alles in Ebene gerichtet wäre und laminare Strömung:

Es würden ~~der~~ die Molekeln nur dann umschnappen falls das Reibungs~~kraft~~moment

$8\pi\mu a^3 \frac{da}{dt}$ grösser ist als das Richtkraftmoment $\frac{mX}{kT}$

? ?

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z}$$

also wird Flüssigkeit in periodischer Art mitgerissen und lamellar gedreht falls

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} > \frac{mX}{kT}\frac{1}{8\pi\mu a^3} \qquad m = 10^{-18} \qquad a = 10^{-8} \qquad \cancel{k = \frac{N}{H}\ \frac{6\cdot10^{23}}{8{,}2\cdot10^{7}}}$$

$$\mu = 0{,}01 \qquad k = \frac{8{,}2\cdot10^{7}}{6\cdot10^{23}}$$

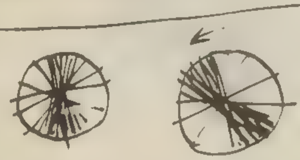
$$\cancel{\frac{10^{-18}\cdot 8{,}2\cdot10^{7}}{6\cdot10^{23}\cdot 8\pi\cdot10^{-2}\cdot10^{-24}\cdot300}X} =$$

$$\frac{10^{-18}\cdot 6\cdot10^{23}}{8{,}2\cdot10^{7}\cdot300\cdot8\pi\cdot10^{-2}\cdot10^{-24}} = \frac{6\cdot10^{5}}{3\cdot8\cdot\pi\cdot8{,}2\cdot10^{-17}} = \frac{10^{5}}{10^{-15}} = 10^{20}X$$

$$\frac{10^{5}}{11\cdot10^{9}} = \frac{1}{11}10^{-4}$$

[illegible] $\frac{\Delta V}{\Delta x} = 10.000$ Volt $= 33$ (E.st.)

Ist nicht folgende Vorstellung eher rationeller: Die drehende Reibung ~~entspricht einem konstanten Drehmoment P, dessen Arbeit $X = Px$~~ bewirkt ~~somit~~ Verteilung



~~[illegible]~~ Falls alle Dipole gerichtet wären (Sättigung), wäre eine Drehung infolge der Reibung ausgeschlossen.

Sonst kann man so argumentieren: von allen Dipolen ist nur der Bruchteil $\frac{\overline{m}}{m}$ als gerichtet anzusehen, während der Rest ungerichtet ist, also wird die Drehung nur bei jenen verhindert

Falls nun $X = \frac{e}{r^2} = \frac{4{,}7\cdot10^{-10}}{(10^{-8})^2} = 4{,}7\cdot10^{6}$ so wäre $\frac{mX}{kT} = 100$ also zu 99% gesättigt

$$(m K \sin\alpha + M) F + kT \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

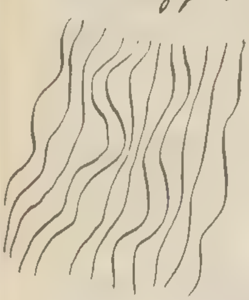
$$F = e^{-\frac{m K \cos\alpha + M\alpha}{kT}}$$

Born's Erklärung d. Unterschiedes zwischen berechneten und wirklichen ~~W~~ Umwandlungspunkt krystallinischer Flüssigkeiten (Verh. Nr. 614 § 11) ist jedenfalls unrichtig, denn innere Flüssigk. Reibung kann keinen Einfluss haben auf Gleichgewichtszustand.

Dagegen ~~W~~ könnte sich das durch die Schwarmhypothese erklären.

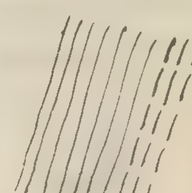
Dabei zweierlei Möglichkeiten:

1). Die krystall. Flüssigkeit besitzt Raumgitterstruktur und es sind nur infolge der Wärmebewegung vorübergehend Abweichungen möglich in Ruhezustand.



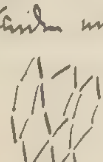
Feld der Molekülaxen

zugleich (inneres Kraftfeld momentanes)



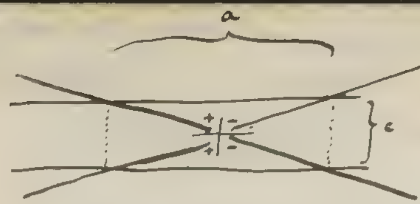
Berechnung analog meinen Rechnungen über Opaleszenz (oder Ornstein's verbesserte Methode) (elektrische Schwankungen)

2). Die Flüssigkeit besitzt keine ~~R~~ regelmässige Struktur, so dass ~~schon~~ auch ohne Wärmebewegung eine Schwarmbildung (analog wie bei Ferromagn. im magnet. Feld) stattfinden würde.



Letzteres nur möglich, falls Moleküle so lang, dass sie nicht mehr als punktf. Dipole behandelbar wären.

3). Flüssigkeitsmittelpunkte sind raumgitterartig angeordnet, aber Axen wären auch ohne Wärmebewegung stabiler in schiefer Lage als in paralleler:



Voraussetzung Stabilität erreichbar durch die zwei Ladungen e an den Polen in Entfernung l

$$W_2 = -4e^2\left[\frac{1}{2\xi} + \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right] \qquad \xi = \frac{a}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$W_1 = -4e^2\left[\frac{1}{a-l}\right] \qquad \eta = \frac{c}{2} - \frac{l}{2}\sin\varphi$$

Ist es möglich, dass:

$$\left.\frac{1}{a - l\cos\varphi} - \frac{1}{c - l\sin\varphi} + \frac{1}{\sqrt{(a-l\cos\varphi)^2 + (c - l\sin\varphi)^2}}\right\} = F(\varphi)$$

$$\geqq \frac{1}{a-l} - \frac{1}{c-l} + \frac{1}{\sqrt{(a-l)^2+(c-l)^2}} \qquad ?$$

$$\frac{1}{1-\lambda\cos\varphi} - \frac{1}{1-\lambda} - \left[\frac{1}{\gamma - \lambda\sin\varphi} - \frac{1}{\gamma-\lambda}\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda\cos\varphi)^2 + (\gamma-\lambda\sin\varphi)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)^2+(\gamma-\lambda)^2}}\right] \geqq 0$$

$$\cancel{\frac{\lambda(\cos\varphi - 1)}{(1-\lambda)(1-\lambda\cos\varphi)}} \quad \cancel{\frac{\lambda(\sin\varphi-1)}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\lambda\sin\varphi)}}$$

$$F(\varphi) = F(0) + \varphi F'(0) + \frac{\varphi^2}{2}F''(0) \quad \Bigg\| \quad F'(0) = \frac{-l}{c^2} + \frac{cl}{(a-l)^3} = -\frac{l}{c^2}\left[1 - \left(\frac{c}{a-l}\right)^3\right]$$

$$F'(0) \lessgtr 0 \quad \text{wenn} \quad \frac{c}{a-l} > 1$$

$$c > a - l$$

dann ist also für genügend kleine φ die geneigte Lage die stabilere!

Doppelschicht

Annahme: das Druckplatte trage eine gegebene Elektrizitätsladung q, welche die entgegengesetzt Elementarquanta Ionen anzieht

$$~~\cdots~~ - 4\pi n\varepsilon \cdot \delta^2 = K\Delta\varphi$$

$$n\varepsilon = \frac{K\Delta\varphi}{4\pi\cdot\delta^2} = \frac{10^{-2}\cdot 4}{4\pi\cdot 10^{-12}} = \frac{1}{3}10^{10}$$

$$n = \frac{1}{3}\cdot\frac{10^{10}}{5\cdot 10^{-10}} = \frac{1}{1{\cdot}5}\cdot 10^{19}$$

$$l = \sqrt[3]{1{\cdot}5\cdot 10^{-19}} = \sqrt[3]{10^{-18}\cdot 0{\cdot}15}$$

$$= 5\cdot 10^{-6}\ \text{cm}$$

$$e = \frac{K\Delta\varphi}{4\pi\delta} = \frac{1}{6}10^{4} \qquad \gamma = n\delta = 3\cdot 10^{12}$$

mittl. Abstand der Ionen von derselben Seite wie mittl. Abstand von Wand

für Nitrobenzol

Leitfähigkeit $10^{-7} = \varepsilon N u$

$$10^{-7} : ~~\cdots~~ \frac{10^{-2}}{8} = x : \frac{0{\cdot}01\cdot 6\cdot 10^{23}}{1000}$$

u?

$$x = ~~\cdots~~ \frac{10^{-7}}{\frac{10^{-2}}{8}}\cdot\frac{0{\cdot}01\cdot 6\cdot 10^{20}}{~~1000~~}\cdot ~~\cdots~~$$

$$= 10^{13}\cdot 50 = 5\cdot 10^{14}$$

also ist Anzahl der Ionen im Innern von mit

genügender Leitfähigkeit; es tritt tatsächlich eine bedeutende Verdichtung an der Oberfläche auf

p. 410 $\quad \frac{0{\cdot}2\ \text{mg}}{1000} = \frac{0{\cdot}2\cdot 10^{-6}}{488}\cdot 6\cdot 10^{23}$ $\qquad \begin{array}{r}240\\248\\\hline 488\end{array} \qquad \begin{array}{r}14\\48\\\hline 62{,}4\end{array}$

$$= 2{\cdot}6\cdot 10^{14}$$ Anzahl der Th Ionen pro cm³ welche die Doppelschicht Ellmoff auf O …

p. 407 $\quad \frac{10^{-3}}{10^{3}}\cdot 6\cdot 10^{23} = 6\cdot 10^{17}$ La(3) Curie ‖ also äußerst verschiedene Kons. je nach Umständen

p. 416 $\quad \frac{15\cdot 10^{-6}}{10^{3}}\cdot 6\cdot 10^{23} = 9\cdot 10^{16}$ (Al)(3) Oberton

Im Falle einwertiger Ionen: $C = c\, n_{c\infty}$

Allgemein: $\varphi_i - \varphi_a = -\frac{RT}{\varepsilon\, \mathfrak{E}} \log z$

$$z^2 - 2z\left(1 + \frac{n}{CKRT} \varphi^2\right) + 1 = 0$$

$$\varphi = \pm \frac{(z-1)\sqrt{CKRT}}{\sqrt{2nz}}$$

~~0~~

I). $0 < z < 1$ $\qquad \varphi = \frac{(1-z)\sqrt{CKRT}}{\sqrt{2nz}}$ $\qquad \frac{n_c}{n_{c\infty}} > 1$ $\left\{\begin{matrix}\text{negative Wand bei} \\ \text{positiver Flüssigkeit}\end{matrix}\right\}$ ladung

für kleine z: $\varphi = \sqrt{\frac{CKRT}{2nz}}$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{RT}{\varepsilon} \log z$$

$$= -\frac{RT}{\varepsilon}\left[\log \frac{CKRT}{2n} - \log(\varphi^2)\right]$$

$$= +\frac{RT}{\varepsilon}\left[\log \varphi^2 - \log \frac{CKRT}{2n}\right]$$

für $z \neq 1$: $\varphi = (1-z)\sqrt{\frac{CKRT}{2n}}$

$$z = 1 - \varphi \sqrt{\frac{2n}{CKRT}}$$

$$\varphi_i - \varphi_a = +\frac{RT}{\varepsilon} \varphi \sqrt{\frac{2n}{CKRT}} = +\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2nRT}{CK}}$$

II). $z > 1$

große z: $\varphi = \sqrt{z}\sqrt{\frac{CKRT}{2n}}$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{RT}{\varepsilon}\left[\log(\varphi^2) - \log \frac{CKRT}{2n}\right]$$

(positive Wand negative Flüssigkeit)

$z \neq 1$: $\qquad z = 1 + \varphi \sqrt{\frac{2n}{CKRT}}$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{RT}{\varepsilon} \varphi \sqrt{\frac{2n}{CKRT}} = -\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2nRT}{CK}}$$

zweiwertige ~~Io~~ Kationen, einwertige Anionen

$$z^3 - z\left(3 + \frac{2n}{CKRT}\varphi^2\right) + 2 = 0$$

I). $0 < z < 1$

für kleine z: $\varphi = \sqrt{\frac{CKRT}{nz}}$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{RT}{2\varepsilon}\left[\log \frac{CKRT}{n} - \log(\varphi^2)\right]$$

$$= \frac{RT}{2\varepsilon}\left[\log \varphi^2 - \log \frac{CRTK}{n}\right]$$

in diesem Falle bewirkt also C für zweiwertige Ionen eine dieselbe Veränderung ~~wie~~ wie $\frac{C}{2}$ für einwertige

das ~~Wert~~ ~~der~~ $n_{c\infty}\big|_1$ entspricht $\frac{1}{4}\, n_{c\infty}\big|_2$

(nicht sicher!)

Dreiwertige Kat(ionen) einwertige Anionen: $n = 3$

$$z^4 - z\left(4 + \frac{2\pi q^2}{CKRT}\right) + 3 = 0$$

Für kleine z: $z = \frac{3 \cdot CKRT}{2\pi q^2}$

$$\varphi_i - \varphi_a = + \frac{RT}{\varepsilon}\left[\lg q^2 - \lg\left(3\,\frac{CKRT}{2\pi}\right)\right]$$

dieser würde also 9 mal stärker wirken als einwertige

~~Für $z \neq 1$:~~

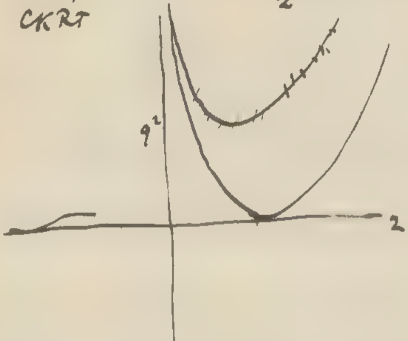
$$\cancel{z = 1 - x \qquad (1-x)^{n+1} - (1-x)\left[n+1 + \frac{2\pi q_0}{CKRT}\,q^2\right] + n = 0}$$

$$\cancel{1 - (n+1)x + n(n+1)\frac{x^2}{2} - n - 1 - 2\pi + nx + x + x + n = 0}$$

$$\frac{2\pi q^2}{CKRT} = z^n + \frac{n}{z} - n - 1$$

für: $n z^{n-1} - \frac{n}{z^2} = 0$

$z = 1$



$$x^2 + \frac{2}{n(n+1)}\square\, x = \frac{2}{n(n+1)}\square$$

$$x = \frac{\square}{n(n+1)} \pm \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}\square + \left[\frac{\square}{n(n+1)}\right]^2}$$

$$= (1-x)^n + \frac{n}{1-x} - n - 1$$

$$= \cancel{1} - \cancel{nx} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cancel{n} + \cancel{nx} + nx^2 - \cancel{n} - \cancel{1}$$

$$= x^2\left(n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) = x^2\left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\,n(n+1)$$

Also für $z \neq 1$: $$z = 1 - x = 1 - q\sqrt{\frac{4\pi}{n(n+1)\,CKRT}}$$

$$\varphi_i - \varphi_a = -\frac{RT}{2}\,\lg z = \frac{RT}{2}\,q\sqrt{\frac{4\pi}{n(n+1)\,CKRT}}$$

also für $n=1$: $$\sim \frac{1}{\sqrt{2C_1}} = \frac{1}{\sqrt{2n_{01}}}$$

$n=2$: $$\sim \frac{1}{\sqrt{6C_2}} = \frac{1}{\sqrt{12n_{02}}}$$

$n=3$: $$\sim \frac{1}{\sqrt{12C_3}} = \frac{1}{\sqrt{36n_{03}}}$$

also ~~equi~~ gleiche Veränderung wird bewirkt durch

Ionenzahlen

$$1 : \frac{1}{6} : \frac{1}{18} : \frac{1}{40}$$

ein zwei drei vierwertigen Kationen

Äquivalentzahlen

$$1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} : \frac{1}{10}$$

Annahme: zwei Arten von Kationen einwertige und ν wertige! wesentlich einwertige Anionen

$$\rho = \varepsilon\left[n_c + \nu n_\nu - n_a - n_b\right]$$

$$\left(\frac{n_c}{n_{c\infty}}\right) = \left(\frac{n_\nu}{n_{\nu\infty}}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{n_{a\infty}}{n_a}\right) = \left(\frac{n_{b\infty}}{n_b}\right) = \frac{1}{z} = x$$

$$n_{c\infty} + \nu n_{\nu\infty} = n_{a\infty} + n_{b\infty}$$

$$n_{c\infty} = C_1 = n_{a\infty}$$

$$\nu n_{\nu\infty} = C_2 = n_{b\infty}$$

$$\cancel{n_{a\infty} = C_1 + C_2\nu}$$

$$n_c - n_{c\infty} + n_a - n_{a\infty} + n_\nu - n_{\nu\infty} + n_b - n_{b\infty} = \frac{2\pi\varrho^2}{KRT}$$

$$C_1\left[\frac{1}{z} - 1 + z - 1\right] + C_2\left[z - 1 + \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{z}\right)^\nu - 1\right]\right] =$$

$$z - 2 + \frac{1}{z} + \frac{C_2}{C_1}\left[z - 1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{z^\nu} - 1\right)\right] = \frac{2\pi\varrho^2}{K C_1 RT}$$

$0 < z < 1$ Für genügend kleine z:

also sowie für C_2 ohne Rücksicht auf C_1

$$\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{z}\right)^\nu = \frac{2\pi\varrho^2}{K C_2 RT}$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^\nu = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{2\pi\varrho^2\nu}{KC_2RT} = \frac{2\pi\varrho^2}{KRT\, n_{\nu\infty}}$$

$$\varphi_i - \varphi_a = \frac{\lg y}{c} = \frac{RT}{\varepsilon\nu}\lg\left[\frac{2\pi\varrho^2\nu}{KC_2RT}\right] = \frac{RT}{\varepsilon\nu}\lg\left[\frac{2\pi\varrho^2}{KRT\, n_{\nu\infty}}\right]$$

Dagegen für $C_2 = 0$:

$$\varphi_i - \varphi_a = \frac{RT}{\varepsilon}\lg\left[\frac{2\pi\varrho^2}{KC_1RT}\right] = \frac{RT}{\varepsilon}\left[\lg\frac{2\pi\varrho^2}{KRT} - \lg C_1\right]$$

$n_{b\infty}$

Für kleine z angenähert:

$$\frac{1}{2} + \frac{C_2}{C_1 \nu}\,\frac{1}{2^\nu} = \frac{2\pi\rho^2}{K C_1 RT}$$

Annahme: zweierlei einwertige Kationen, ein einwertiges Anion

$$\rho = \varepsilon\left[n_{c1} + n_{c2} - n_a\right] \qquad \underbrace{n_{c1\infty}}_{C_1} + \underbrace{n_{c2\infty}}_{C_2} = n_{a\infty}$$

$$\left(\frac{n_{c_1}}{n_{c\infty_1}}\right) = \left(\frac{n_c}{n_{c\infty}}\right)_2 = \left(\frac{n_{a\infty}}{n_a}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(n_c - n_{c\infty})_1 + (n_c - n_{c\infty})_2 + (n_a - n_{a\infty}) = \frac{2\pi\rho^2}{KRT}$$

$$C_1\left(\frac{1}{2}-1\right) + C_2\left(\frac{1}{2}-1\right) + (C_1+C_2)(2-1) = \uparrow$$

$$\left(\frac{1}{2} - 2 + 2\right) = \frac{2\pi\rho^2}{KRT(C_1+C_2)}$$

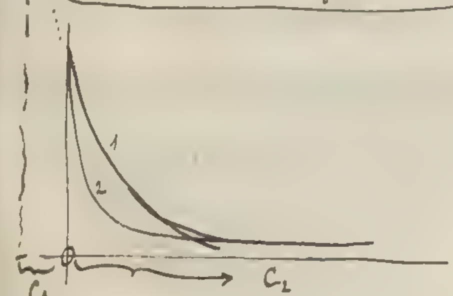
also ist in diesem Falle die ganze Konzentration $C_1 + C_2$ maßgebend, so wie bei einfachen Salzen

---

Ist in jenem Falle eine Umladung möglich? Nein

Es wäre also das allgemeine Verhalten dargestellt durch logarithmische Curve (1)

bei Zusatz von C_2 zu gegebenem C_1

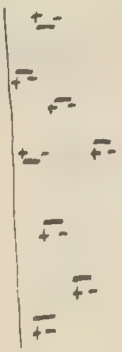


Keine Umladung!

Im Falle einer Beimischung mehrwertiger Ionen fallen die Curven viel rascher (2), je nach Größe des C_1 etc., so dass je nach Umständen äußerst kleine Mengen mehrwertiger Ionen äquivalent sein können mit großen Mengen einwertiger, in Bezug auf ihre Fähigkeit, das $\varphi_0 - \varphi_\infty$ zu erniedrigen.

Dabei ist $\left(\frac{n_\nu}{n_{\nu\infty}}\right) = \left(\frac{n_c}{n_{c\infty}}\right)^\nu = \frac{1}{2^\nu}$, also ist die Ansammlung der mehrwertigen Ionen in den Grenzschichten von höherer Größenordnung als der einwertigen

Andere Annahme: in der Grenzschichte ~~werden~~ Dipole durch Molekularkräfte gerichtet



$$\rho = \varepsilon\left[c n_c - a n_a + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial P}{\partial x}\right] = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{dq}{dx}$$

$$P = \mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{3}P\right) \qquad q = \int_x^\infty \rho\, dx = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_x$$

$$\frac{n_c}{n_{c\infty}} = e^{-chU} \qquad \frac{n_{a\infty}}{n_a} = e^{ahU} \qquad \Bigg\| \qquad P = \frac{\mu}{1-\frac{\mu}{3}}\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\varepsilon\left[c n_c - a n_a\right] = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left[\frac{1}{4\pi} + \frac{\mu\varepsilon}{\lambda(1-\frac{\mu}{3})}\right]$$

$$= \frac{\partial q}{\partial x}\left[1 + \frac{4\pi\mu\varepsilon}{\lambda(1-\frac{\mu}{3})}\right]$$

$$\frac{1}{n_{c\infty}}\frac{dn_c}{dx} = -ch\, e^{-chU}\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= -ch\frac{n_c}{n_{c\infty}}4\pi q$$

$$\frac{dn_c}{dx} = -4\pi h q . c n_c \qquad \frac{dn_a}{dx} = 4\pi h q . a n_a$$

$$\frac{d}{dx}(n_c + n_a) = -4\pi h q \frac{\partial q}{\partial x}\left[1 \cdots\right]$$

$$n_c + n_a = 2\pi h q^2 \left[1 + \cdots\right]$$

Es würde also qualitativ dasselbe resultieren (äquivalent mit Verminderung der Dielektrizitäts Konstante). ~~Als~~ Allerdings möglich, dass die Abweichung von der Proportionalität der Polarisation und Kraft infolge Sättigung in der Grenzschichten eine Rolle spielt. Zu ?

$$\Delta\varphi = \cancel{\frac{q\sqrt{2\pi}}{K\,2\sqrt{N}}}\sqrt{\frac{RKT}{2C\pi}} \qquad \Bigg\| \qquad \frac{RT}{N\varepsilon}\, q\sqrt{\frac{2\pi N}{CRKT}}$$

$$2 \neq \frac{CKRT}{2\pi q^2} = \frac{5.10^{14}.80.8{\cdot}3.10^7.290}{2\pi.\frac{1}{4}10^{12}.3.10^{23}} =$$

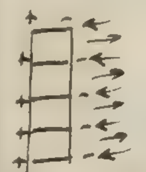
$$= \frac{4.8.3.10^{25}}{10^{36}} = \frac{10^{27}}{10^{36}} = 10^{-9}$$

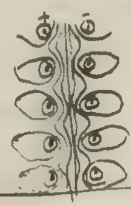
$$\Delta\varphi = \frac{RT}{\varepsilon}\log 2 = \frac{8{\cdot}3.10^7.290}{4{\cdot}7.10^{-10}.6.10^{23}}\log(10^{-9})$$

$$= \frac{3.\cancel{8\cdot 7}}{6.4{\cdot}7}10^{-4}.\frac{9.\cancel{2{\cdot}3}}{2}\ \overset{20\cdot 7}{} = 2.10^{-3} = \underline{0{\cdot}6 \text{ Volt}}!$$

Alle diese Rechnungen entsprechen jedoch in Wirklichkeit nur dem Falle, wo die Oberfläche einer Flüssigkeit eine statische Ladung erhält — nicht aber den hier gemachten Voraussetzungen, wo an der Oberfläche eine Doppelbelegung wirkt. Eine solche Dipol-Doppelbelegung ~~wird ebenso~~ wird überhaupt kein ~~außen~~ elektr. Kraftfeld bewirken (~~analog einer~~ unendlich ~~magnetischen Schale~~) (!) insofern die Dipolabstände klein sind im Verhältnis zum Molekular-Abstand. Nur Kräfte zweiter Ordnung!

Kraft Verteilung ~~in~~ außerhalb einer unendlich ausgedehnten Doppelbelegung





Falls alle oberflächlichen Wasserdipole gerichtet würden, was für einen Pot. sprung würde das ergeben?

18 gr. H_2O enthalten 6.10^{23} Mol.; also: $2r = \sqrt[3]{3.10^{-23}} = \sqrt[3]{30}.10^{-8} = 3.10^{-8}$

Also Ladung der Flächeneinheit $\frac{4.7.10^{-10}}{9}.10^{16} = \frac{1}{2}10^{6}$ (est. E.)

Annahme $m = 10^{-18} = \frac{1}{3}.10^{-8}.4.7.10^{-10}$

$l = 2.10^{-9}$

$\Delta\varphi = 4\pi\sigma . l = 4\pi\frac{1}{2}.10^{6}.2.10^{-9} = 1.2.10^{-2}.300$ Volt $= 3.6$ Volt

$\Delta\varphi = 0.045$ Volt

also [illegible] sind die elektromot. ganz dieselbe

~~Die elektromotorischen Pot. diff. müssen also von einer anderen Schicht herrühren.~~

Was werden die neutralisierenden Schichten bewirken?

nach Seng p. 157: $\Delta U = \frac{4\pi}{K}.\frac{1}{2}.10^{6}.\frac{0.0001}{300}$ Volt $= \frac{2}{K} = 0.025$ Volt

$$z^2 - 2z\left(1 + \frac{\pi N}{5.10^{14}.80.8.3.10^{7}.291}\frac{1}{4}10^{12}\right) + 1 = 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{RT}{2}\lg z = \frac{8.3.10^{7}.291}{1.7.10^{-10}}\frac{\frac{1}{2}10^{-7}\sqrt{\frac{2}{3}}}{300} = 10^{10}?$$

$$z = 1 - \frac{1}{2}10^{6}\sqrt{\frac{2\pi}{5.10^{14}.80.8.3.10^{7}.291}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{4.0.8.3.2.91.10^{24}}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{10^{-7}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Kontakt,

Damit eine Doppelschicht von der Stärke der Potentialdifferenzen ~~der ... Differenzen~~ erzeugt würde

$$\Delta\varphi = \frac{RT}{\varepsilon}\lg z = \overset{1.\ \mathrm{Volt}}{\cancel{\ldots}} = \frac{1}{300} = \cancel{\ldots}$$

$$\frac{RT}{\varepsilon} = \frac{8.3\cdot10^{7}\cdot 290}{4.7\cdot10^{-10}\cdot 6\cdot10^{23}} = \frac{8.3\cdot10^{9}}{9.4\cdot10^{13}} = 0.9\cdot10^{-4}$$

also müsste $\lg z = -30$ $\quad z = 10^{-13} = C\frac{kRT}{2\pi\rho^2}$

da muss wohl ρ weit grösser sein, Schichten weit grösserer Dicke, mit Ionenüberschuss gefüllt.

oder bei demselben ρ müsste $C_+ = 5\cdot10^{-10}$ (!) dagegen $C_- = \frac{10^{10}}{5}$ (was wohl möglich,

Ob Perrin's Theorie der elektrosmot. Doppelschichten quantitativ zulänglich ist?

Stärkedifferenz d. $\left.\begin{matrix}H\\OH\end{matrix}\right\}$ Ionen und anderer Ionen

Leitfähigkeit reinen Wassers: 10^{-7} Ionenzahl $5\cdot10^{14}$

(aus Ionenstärken) $\left(\frac{x}{\frac{1}{3}10^{23}}\right)^2 = 10^{-14}$

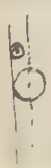
$3x\cdot10^{-23} = 10^{-7}$

gewöhnl. reines: 10^{-6} Ionenzahl $5\cdot10^{15}$

$x = \frac{1}{3}\cdot10^{+10}$

$= 3\cdot10^{15}$?

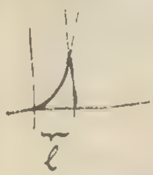
Übertriebene Annahme: dass der ganze für die eine Ionenart freie Raum mit deren Dichte erfüllt ist



Annahme die $\left.\begin{matrix}H\\OH\end{matrix}\right\}$ Ionen hätten Radius Null

$$\rho = 5\cdot10^{15}\cdot\frac{3}{2}10^{-8}\cdot4.7\cdot10^{-10} = 3.5\cdot10^{-2} = 0.035 \text{ (abs. E)}$$

= Ladung pro Flächeneinheit



$$K\frac{\partial U}{\partial x} = -4\pi\rho$$

$$U_1 - U_0 = \frac{l^2}{2}\frac{4\pi\rho}{K} = \frac{2\pi\rho l}{K} = \frac{2\pi}{80}\,0.035\cdot\frac{3}{2}\cdot10^{-8}\cdot300 = 0.4\cdot10^{-10}\cdot3 \text{ Volt!}$$

$= 12\cdot10^{-8}$ Volt

$$\Delta\varphi \neq \rho\cdot\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{RT}{CN\,2\pi K}} = \frac{0.035}{5\cdot10^{-10}}\sqrt{\frac{8.3\cdot10^{7}\cdot290}{5\cdot10^{15}\cdot2\pi\cdot80\cdot6\cdot10^{23}}} = \frac{7\cdot10^{-15}}{10^{-7}\sqrt{20\pi}} = \frac{7}{8}10^{-8}\cdot300 \text{ Volt} = 3\cdot10^{-6} \text{ Volt}$$

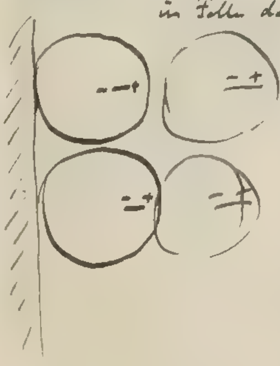
Somit ist die Doppelschichte jedenfalls nicht auf die rein mechanische Ansammlung der Ionenart von kleinerem Durchmesser in den Wandschichten (infolge osmotischen Druckes) zurückzuführen.

Es muss jedenfalls eine Anreicherung der Wandschichten infolge anderer Kräfte stattfinden.

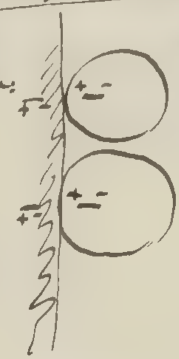
Betreffs der Kräfte, welche die Dipolschichte in der Wandfläche bewirken können:

Falls Molekül (zusammengesetzt aus zweierlei Ionen von verschiedenen Dimensionen!) durch ein asymmetrisch ~~angebr~~ angebrachten Dipol repräsentiert würde:

im Falle dass die Dielektr. konst. der Wand geringer ist als jene der Flüssigkeit



im entgegengesetzten Falle:



Es erscheint ziemlich unwahrscheinlich, dass der Ionengehalt die wesentliche Quelle der elektromot. Pot. Diff. bilden sollte. Die Leitfähigkeit „nimmt" ist ja kolossal variabel, aber Pot. Diff. einigermaßen konstant. Darum wäre obige Dipol-Hypothese wahrscheinlicher. Dabei würden Ionen nur mittelbar, modifizierend mitwirken ~~dazu kommen~~. Im Falle des Wassers würde auch das Vorzeichen stimmen. Aber die Dicke der Doppelsch. wäre von Grössenordnung 10^{-7}! Doch nicht, denn es schliessen sich weitere Schichten an!

Dimensionen des Nitrobenzol-Molek.:

$C_6H_5NO_2$

$$\begin{array}{r} 72 \\ 5 \\ 14 \\ 32 \\ \hline 123 \end{array}$$

123 gr. — 6.10^{23}

$\rho = 1{\cdot}20$ | vol. $= 103\ cm^3$

$$2r = \sqrt[3]{\frac{6.10^{23}}{103}} = \sqrt[3]{\frac{6}{103}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6{\cdot}03}}\ 10^{-7}$$

$$= \qquad = \underline{5{\cdot}49.\ 10^{-8}}$$

7803

2·2197

0·7399

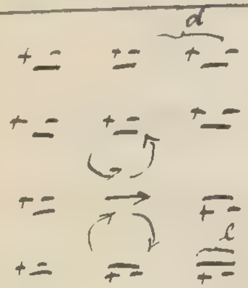
Potentielle Energie zweier Dipole in axialer Lage

$$\frac{2\varepsilon^2 l^2}{r^3} = \frac{2m^2}{r^3} = \frac{2\cdot 10^{-36}}{27\cdot 10^{-24}} \neq 10^{-13}$$ [Falls Dielektr. Konstante = 1]

$$\frac{1}{2}\frac{RT}{N} = \frac{8{.}3\cdot 10^{7}\cdot 290}{2\cdot 6\cdot 10^{23}} = 2\cdot 10^{-14}$$

also vernachlässigbar im Vergl. zu mittl. Energie, somit erhebliche Richtkraft

---



Kraft welche von einer (zweidimensional unendlichen) Dipol-Konstellation ausgeübt wird

$$X = \sum{}' \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} m = \cancel{m \sum{}' \frac{x}{r^3} = m \sum \frac{\cos\varphi}{r^2}}$$

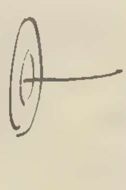
$$= m \sum\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) = m \sum \frac{1}{r^3}(1-3\ldots)$$

z.B. $r = \frac{x}{\cos\varphi}$

$$\sum{}' = \frac{2\pi}{x^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^3\varphi\,(1-3\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{x^3}\left[\frac{\cos^4\varphi}{4} - 3\frac{\cos^6\varphi}{6}\right] = \frac{\pi}{x^3}$$

Andererseits



$$U = \int_0^R 2\pi\sigma \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2+z^2}} = 2\pi\sigma \sqrt{x^2+z^2}\Big|_0^R = 2\pi\sigma\left[\sqrt{x^2+R^2} - x\right]$$

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2\pi\sigma\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right]$$

$$\lim_{R=\infty} X = -2\pi\sigma$$

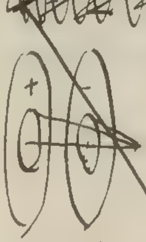
also wäre die Kraft welche von zwei ‖ entgegengesetzt geladenen parallelen Ebenen ausgeübt wird

außen = Null.

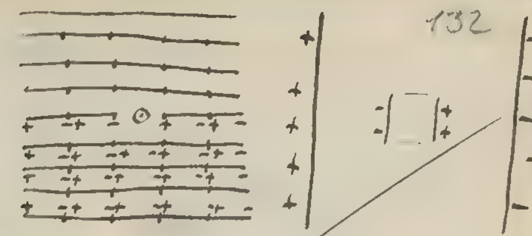
jedoch aber im Innern $= -4\pi\sigma$

also durchschnittlich [in einer großen Höhlung] $4\pi\sigma\frac{l}{d} = 4\pi\frac{\varepsilon n_z l}{d} = 4\pi m$ Anzahl der Dipole pro Volumeinheit

~~[illegible]~~



$X = 2\pi b(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$



Auch direkt indem man die Dipole ersetzt durch andere mit gleichem Moment, aber von der Länge d, so dass sie sich alle berühren; dann heben sich die ~~Ladungen~~ Belegungen derselben im Innern alle auf und es bleibt nur die Wirkung der zwei Außenbelegungen $n\varepsilon\,\frac{4\pi l}{d} = 4\pi m\nu$

Dazu kommt die Wirkung der übrig bleibenden Ladungen der inneren Höhlung

$$\frac{2\left(\varepsilon\cdot\frac{l}{d}\right)}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{8\varepsilon l}{d^3} = \frac{8m}{d^3}\,\frac{d}{l} = 8m\nu$$, welche im entgegengesetzten Sinne wirkt

Im Mittelpunkt eines Dipols würde also bei derart regelmäßiger Anordnung die Kraft wirken

$X = 4(\pi - 2)\,m\nu$ und zwar im entgegengesetzten Sinne als der Anordnung entspricht

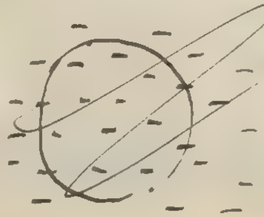
Daher wäre eine ganze derartige Anordnung instabil.

Stabil wird sie erst eventuell bei Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung der Dipole

Bei Symmetrie in XYZ ist natürlich $\sum\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) = \sum\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) = \sum\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right) = 0$

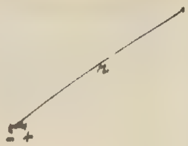
Lorentz 1. 306, 138.

Also kommen (bei regulärer kubischer Anordnung) als Richtkräfte nur die Glieder höherer Ordnung in Betracht



Lorentz Betrachtungsweise: alle in der Kugel befindlichen oder von deren Oberfläche geschnittenen Dipole geben $\sum = 0$

Es bleibt also nur die Wirkung der äußeren

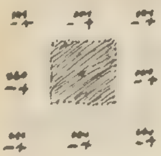


$$U = \frac{x}{r^3} = \frac{\cos\varphi}{r^2}$$

$$X = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) = -\frac{1}{r^3}\left(1 - 3\cos^2\varphi\right)$$

$\cos^2\varphi < \frac{1}{3}$ $\quad X < 0$

$\sin^2\varphi > \frac{2}{3}$



$$X = X_0 + \xi\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0 + \frac{\xi^2}{2}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right) \cdots$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{3x}{r^5} - \frac{6x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7} = -\frac{9x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \qquad -\frac{3y}{r^5} + \frac{15x^2y}{r^7}$$

$$\sum X = \sum X_0 + \xi\left[\sum\left(-\frac{9x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}\right)\right] + \eta\sum\left(-\frac{3y}{r^5} + \frac{15x^2y}{r^7}\right) + \zeta\sum(\qquad)$$

$$\bar{X} = \frac{\iiint_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sum X \, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{d^3} = \sum X_0 + \frac{d^2}{3}\frac{1}{2}\sum\left[\underbrace{\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)}_{=0}\right]_0$$

$\xi^2\eta^2$

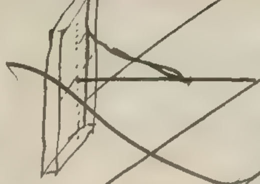
$$+ \frac{d^4}{5 \cdot 4!}\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 X}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}\right) + \frac{6d^4}{9 \cdot 4!}\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 X}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4 X}{\partial x^2\partial z^2}\right)$$

$\xi^4 + \cancel{4\xi^3\eta} + 6\xi^2\eta^2 + \cancel{4\xi\eta^3} + \eta^4 \cdots \cancel{\xi^2\eta\zeta}$ $\quad =$

$\frac{\xi^5\eta\zeta}{5}$ $\quad 6\,\frac{\xi^3\eta^3\zeta}{9}$

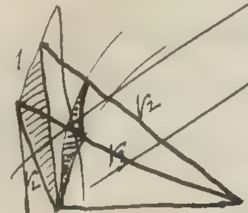
$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} \quad \cdot\,\infty \quad \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}\right) + 2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} \cdots\right) = 0$$

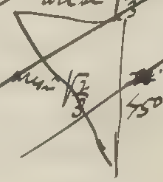
$$\bar{X} = \sum X_0 + \frac{d^4}{4!}\underbrace{\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right]}_{\frac{4}{15}}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}X\right]_0 + \cdots$$

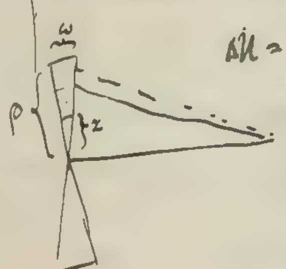


$$\cancel{\iint \frac{dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int dz\, \ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\Big|_{y=-a}^{y=+a}}$$

$$\cancel{=\int dz\,\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2+z^2}}{-a+\sqrt{\cdots}} = 2\ln - \int \frac{z^2\,dz}{\left(a+\sqrt{x^2+a^2+z^2}\right)\sqrt{x^2+a^2+z^2}}}$$







$$dU = \int_0^\rho \frac{\omega z\,dz}{\sqrt{x^2+z^2}} = \omega\left[\sqrt{x^2+\rho^2}-x\right]$$

$$U = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left[\sqrt{x^2+\frac{a^2}{\cos^2\varphi}}-x\right]$$

$\cancel{\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}$

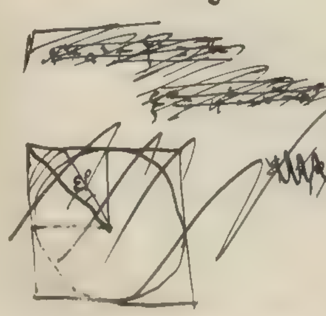
$\cancel{a\,\mathrm{tg}\,\varphi = \xi}$ $\quad \cancel{\frac{a^2\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = a\,d\xi}$

$\cancel{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\xi}{a}}$

$\cancel{\frac{a^2}{\cos^2\varphi} = a^2(1+\mathrm{tg}^2\varphi)}$

$\cancel{d\varphi = \frac{d\xi}{a(1+\mathrm{tg}^2\varphi)}}$

$$\cancel{a\int_0^a \left[\sqrt{x^2+a^2+\xi^2}-x\right]\frac{d\xi}{a^2+\xi^2}}$$



$\rho = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}$ $\quad \frac{a}{\cos\varphi}$

$$\cancel{\frac{\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{x^2+\frac{a^2}{\cos^2\varphi}}}}$$

$$X = 8\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left[\sqrt{x^2+\frac{a^2}{\cos^2\varphi}}-x\right] =$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{\cos^2\varphi}}}-1\right\}$$

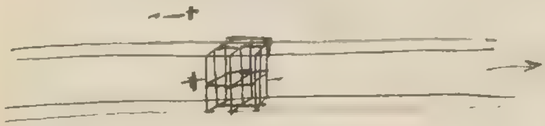
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left[\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}-1\right]$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}} - d\varphi = 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - 2\pi = 8\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d\frac{x}{\sqrt2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)^2}} = 8\int_0^{\frac12}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 8\arcsin\left(\tfrac12\right)$$

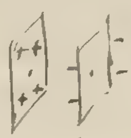
$$= 8\cdot\frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Man kann folgendermaßen schließen:

Die elektr. Kraft E bedeutet die Kraft im Innern einer ~~lang~~ in der Richtung der Kraft in langgestreckten Höhlung. Dasselbe auch in einem elektronisch zusammengesetzten Körper.



Nehmen wir an, diese Höhlung sei von quadratischem Querschnitt und zerlegen dieselbe in einen entsprechenden um A herum symmetrisch konstruierten Würfel und zwei (sehr lange) Stäbe von quadrat. Querschnitt, welche sich praktisch genommen ins ∞ erstrecken. Auf den Punkt A wirkt dann 1). die Kraft E 2). die von den im Würfel enthaltenen Dipolen ausgeübte Kraft 3). die von den Stäben ausgeübte Kraft. Da hierbei der Querschnitt so groß angenommen werden darf, dass die Stäbe als homogen gefüllt angesehen werden können, besteht die Wirkung (3) nur aus den Kräften, welche durch die beiden Belegungen



der inneren ~~…~~ Schnittflächen ausgeübt werden, was ~~auf~~ unmittelbar berechnet zu $\frac{4\pi}{3}P$

Dagegen ist der Anteil (2) = Null, wie vorher nachgewiesen, für Kugel oder Würfel

$\therefore$ wirkt auf A die Kraft: $E + \frac{4\pi}{3}P$

Dasselbe (ergibt sich) noch einfacher, wenn die Höhlung zylindrisch und die innere Fläche kugelförmig angenommen wird.

$$4\pi P = \kappa\left[E + \frac{4\pi}{3}P\right]$$

$$D = E + P = E\left(\frac{1+\kappa}{1-\frac{\kappa}{3}}\right) = E\,\frac{1+\frac{2\kappa}{3}}{1-\frac{\kappa}{3}}$$

Dabei ist aber noch nicht nachgewiesen, dass die Kraft E im Innern einer solchen Höhlung identisch ist mit dem Mittelwert der Kraft im Körper

p. 381

Quincke-Helmholtz (p. 378) $\Delta\varphi$ für Wasser-Glas

$\Delta\varphi = 0{\cdot}052$ Volt   wenig verändert wenn Leitfähigkeit durch Auflösung v. Glas auf das 20fache gestiegen war (überzogen Säure empfindlicher (?))

Tereschin (371) $\Delta\varphi = 0{\cdot}047$ Volt

Dorn (p. 385) $\Delta\varphi = 0{\cdot}0519 - 557$ (~~Leitfähigkeit~~ g. Eb^2 $\sigma = 4{\cdot}65 - 8{\cdot}42 \cdot 10^{-8}$

Cameron-Oettinger (408) $0{\cdot}050 - 0{\cdot}069$ (sauer – alkalisch)

(Elissafoff $\dfrac{\Delta\varphi \text{ Wasser} \quad \lambda = 2 \cdot 10^{-6}}{\Delta\varphi \;\;" \quad 10^{-5} \text{ Ad NaCl}}$ unverändert ?
$\rightarrow \lambda = 0{\cdot}0012 \cdot 10^{-3}$)

Morton (416) Cu-Wasser Kataphorese v. wenig geändert bis $38 \cdot 10^{-6}$ mol. KCl
$\downarrow$
$\lambda = 4{\cdot}6 \cdot 10^{-6}$

Riddick Ellis (417) NaOH große Wirkung bis 0·002 normal
bei HCl stärkere Verminderung

$p - p_s = \frac{2\sigma}{r}\frac{\gamma}{\gamma_0}$ $\qquad -\Delta T = \frac{4r^2\pi\, dr\, \omega}{\frac{4}{3}r^3\pi}$

$\cancel{\frac{dp}{dr} = -\frac{2\sigma}{r^2}\frac{\gamma}{\gamma_0}}$

$$p_s = p_{s0} - \frac{dp}{dT}\,\frac{3\omega\, dr}{r}$$

$$p = p_s + \frac{2\sigma}{r}\frac{\gamma}{\gamma_0} - \frac{dp}{dT}\,\frac{3\omega}{r}\Delta r$$

Dielektr. Kräfte

$\frac{m}{r^3}\left(1 + \cdots \frac{l}{r}\right)$ $\qquad l = \frac{10^{-18}}{5\cdot 10^{-10}} = \frac{10^{-8}}{5}$

$\frac{10^{-18}}{(5\cdot 10^{-8})^3} = 10^4$ $\qquad \frac{l}{r} = \frac{1}{25}$

Bei einer Grösse ordg. d. Dipolmomente 10^{-18} würde also das zweite Glied bereits in Betracht kommen

---

Debye

Wie würde die Pol. in einer Schichte sich verteilen, wo nur die Wandschicht fest polarisiert ist?

$K = E + \frac{4\pi P}{3} = E + mn\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{mK}{kT}\right) - \frac{kT}{mK}\right]$ Das gilt im homogenen Feld

im ungleichförmigen ▭▭▭▭

Im ungleichförmigen Feld, falls P nur in X veränderlich. Ob das überhaupt möglich?

So als ob freie Ladungen mit Raumdichte $\rho = \frac{\partial P}{\partial x}$

dieselben würden eine Kraft ausüben: $E = 2\pi\left[\int_0^x \rho\, d\xi - \int_x^\infty \rho\, d\xi\right] = 2\pi\left[P_x - P_0 - (P_\infty - P_x)\right]$

(Dielektr. Konst.?) $\qquad = 4\pi\left[P_x - \underbrace{\frac{P_0 + P_\infty}{2}}_{\text{C}}\right] = 4\pi P - C$

$K = \frac{4}{3}\,4\pi P - C = \frac{4}{3}\,\cancel{4\pi\, mn}\,\mathrm{ctg}$

Veränderlichkeit in x ist also überhaupt nicht möglich!

Danach wäre Verschiedenheit von P nur durch Ionen zu erklären

Bei permanenter Magnetisierung gelten natürlich nicht mehr die Grenzbedingungen $B_{n1} = B_{n2} = \kappa J$ Kraft $\parallel J$ etc.

$$U_x = \int_x^R 4\pi r\,dr + \frac{4\pi x^3}{3x} = 2\pi(R^2 - x^2) + \frac{4\pi x^2}{3}$$

$$U_i = \frac{U_x - U_{x-\delta x}}{\delta x} J = J\left[-4\pi x + \frac{8\pi x}{3}\right] = \frac{4\pi x}{3} J$$

$$X_x = -\frac{4\pi J}{3}$$

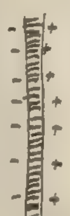
also Feldstärke im Innern einer gleichförmig magnetisierten Kugel $= -\frac{4\pi J}{3} = H$

dagegen ist die Kraft die auf den Mittelpunkt ausgeübt wird $= 0$

Somit tatsächlich $\overset{\circ}{K} = \overline{H} + \frac{4\pi J}{3} = 0$

Kraft im Aussenraum $\left.\begin{matrix}X\\Y\\Z\end{matrix}\right\} = \nabla\left(\frac{4\pi}{3} J \frac{x}{r^3}\right)$

Kraft ausserhalb einer ∞ ausgedehnten Doppelschichtplatte $= 0$



$$H_e = B_e = 0$$

im Innern: $H_i = -4\pi J$

Dagegen sollte $\overset{\circ}{K}_i = -4\pi J + \frac{4\pi}{3} J$ sein $= -\frac{8\pi}{3} J$

In einem homogenen Würfel:

Kraft (im Mittelpunkt) $H_i = -\frac{4}{3}\pi J$ (siehe Berechnung auf vorstehender Seite)

$$\overset{\circ}{K}_i = -\frac{4}{3}\pi J + \frac{4\pi}{3} J = 0$$

stimmt, indem im Mittelpunkt $K = 0$

Dipol

$U = m\frac{x}{r^3}$

Mittlere Kraft in einer Kugel vom Radius R:

$X = \frac{m}{r^3}\left[1 - 3\cos^2\theta\right]$

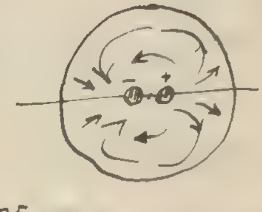
$\bar{X} = \cancel{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0 \frac{dr}{r}} = \infty$

[illegible]

$U = \frac{e}{r}$

$X = \frac{e}{r^2}\cos\theta$

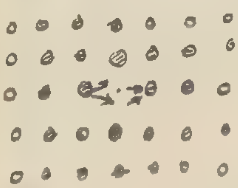
$\bar{X} = \frac{e}{\frac{4\pi}{3}R^3}\int_0^R \frac{2\pi r^2 dr}{r^2}\cos\theta\sin\theta\, d\theta$



Jedenfalls muss schon wegen der Symmetrie ± die durchschnittliche X Kraft in einem vom Mittelpunkt des Dipols aus gezogenen Kugelraum $= 0$ sein.

Daher rührt der Unterschied von H_i und H_e nicht vom Eigenfeld des Dipols her.

Also ist Unterschied nur bedingt durch die Anordnung



$2 \cdot \; -\frac{2}{a^2}$

$4 \cdot \; \frac{1}{a^2}$

$4 \cdot \; \frac{1}{2a^2}$

$2.4 \; \frac{1}{2a^2}\left(1-\frac{3}{2}\right)$

$2.4 \; \frac{1}{3a^2}\left(1-\frac{3}{3}\right)$

$= \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^2} = 0$

von der ersten Würfelschale

Ebenso muss jede weitere Würfelschale ΣX Null ergeben (Lorentz Rechnung)

Dagegen für den Mittelpunkt des Zwischenraums

$8\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}\left[1-\frac{3}{3}\right] = 0$!

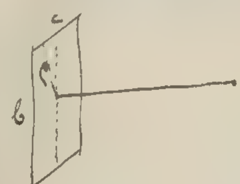
Überhaupt herrscht auch dort völlige Symmetrie in XYZ, also ist auch dort $\Sigma X = 0$

Kraft im Mittelpunkt eines längs der X Axe homogen magnetisierten Parallelepipeds

Potential eines Elementar Dreiecks auf Punkt welcher in der Scheitelnormale liegt

$$U = \sigma\, d\varphi \int_{z=0}^{\rho} \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2+z^2}} = \sigma\, d\varphi\left[\sqrt{x^2+\rho^2} - x\right]$$

Pot. eines Rechteckes auf Punkt, welcher in der Mittelnormale liegt



$$\rho = \frac{b}{2\cos\varphi}$$

$$U = 4\sigma\, d\varphi \left\{ \int_0^{\varphi_1} \left[\sqrt{x^2+\left(\frac{b}{2\cos\varphi}\right)^2} - x\right] + \int_0^{\varphi_2} \left[\sqrt{x^2+\left(\frac{c}{2\cos\varphi}\right)^2} - x\right] \right\}$$

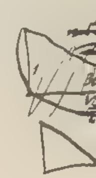
$$= \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{x^2+\left(\frac{c}{2\sin\varphi}\right)^2} - x\right]$$

$$\frac{b}{2\cos\varphi_1} = \frac{c}{2\cos\varphi_2}$$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\frac{\pi}{3}$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = 4\sigma \underbrace{\int_0^{\varphi_1} d\varphi \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{b}{2\cos\varphi}\right)^2}} - 1\right]} +$$

$$\int_0^{\varphi_1} d\varphi \left[\frac{x\cos\varphi}{\sqrt{x^2\cos^2\varphi + \beta^2}} - 1\right] = \int_0^{\varphi_1} d\varphi \left[\frac{x\cos\varphi}{\sqrt{\beta^2+x^2-x^2\sin^2\varphi}} - 1\right] = \int_0^{\frac{x\beta}{\sqrt{\beta^2+y^2}}} \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2+x^2-\xi^2}} - \varphi_1$$

$$= \arcsin \frac{x\beta}{\sqrt{\beta^2+y^2}\sqrt{\beta^2+x^2}} - \varphi_1$$

$$X = 4\sigma\left\{\arcsin \frac{x\beta}{\sqrt{(\beta^2+x^2)(\beta^2+y^2)}} + \arcsin \frac{x\beta}{\sqrt{(\gamma^2+x^2)(\beta^2+y^2)}} - \frac{\pi}{2}\right\}$$

$\sigma = \frac{m}{a^2}$

Gesamtkraft (beiderseitige) ist also zweimal so gross

1). $2\cdot\frac{2}{\left(\frac{a}{2}\right)^3} = \frac{32}{a^3}$ $\Big\|$ $\begin{matrix}\alpha = a\\ \beta=\gamma=\frac{a}{2}\end{matrix}$ $\Big\|$ $8\left\{2\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}-\frac{\pi}{2}\right\}$

2). $\frac{32}{a^3} + 2\cdot\frac{2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^3} + 8\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}^{\,3}}\left(3\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}-1\right) + 8\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{4}}^{\,3}}\left(3\frac{\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}}-1\right)$

$+\,8\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}^{\,3}}\left(3\frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}}-1\right) + 8\frac{1}{\sqrt{2+\frac{9}{4}}^{\,3}}\left(3\frac{\frac{9}{4}}{2+\frac{9}{4}}-1\right)$

$\Big\|\begin{matrix}\alpha = 2a\\ \beta=\gamma=\frac{3a}{2}\end{matrix}$ $\qquad 8\left\{2\arcsin\frac{3}{\sqrt{\frac{9}{4}+4\cdot\frac{9}{2}}}-\frac{\pi}{2}\right\}$

$$\begin{array}{r} 30103\\ \underline{5}\\ 9.80103\ -10\\ 33 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 39.233\\ \hline 78.467 \end{array}$$

$11.533 : 90 = 0.12814 \cdot 4\pi$

$9.5000 - 10$

$$\begin{array}{r} 18435\\ 30870\\ -\,90\\ \hline 53\ 13 \end{array}$$

$:90\cdot 4\pi$

$0.5903\cdot 4\pi$

$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{25.\pi}{8}}}$

$\sqrt{\frac{8}{25}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

$4\sqrt{2}$

$$\frac{32}{27} + \frac{8}{\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}}\ \frac{2}{5} - \frac{8}{\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}}\ \frac{6}{9} + \frac{8}{\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}}\ \frac{14}{13} + \frac{8}{\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2}}\ \frac{10}{17}$$

$$= \frac{32}{27} + 16.4^{3/2}\left\{ \frac{7}{13^{5/2}} + \frac{5}{17^{5/2}} - \frac{1}{5^{5/2}} - \frac{3}{9^{5/2}} \right\}$$

0·6990
1·7475
0·2525−2

0·9542
0·4771
2·3855
0·0916 −2

1·1139
~~8451~~
~~2·8475~~
~~0·27847~~
~~0·9916~~
0·0604 −2

1·2304
3·0769
6990
0·6230 −3

5051
4314
0737

0·01788
0·01235
−0·03023
+ 1569
−0·01454

0·01149
0·00420
+0·01569

1·1626
0·90315
0·1626 −2
0·22835

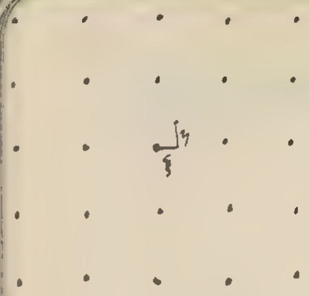
6021
30105
90315

1·1848
−0·2283
0·9565

$$4\pi\left\{\frac{2\arcsin\left(\ \cdots\ \sqrt{\frac{32}{100}}\right.}{90} - 1\right\}$$

1·5051
9·75255 −10

34·447
68·894 : 90 = 0·7655
X = − 0·2345 . 4π



$$X = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

$$X = X_0 + \xi\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0$$

$$+ \frac{\xi^2}{2}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right) + \xi\eta\,\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y} + \xi\zeta\,\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z} +$$

$$+ \frac{\eta^2}{2}\,\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \eta\zeta\,\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z} + \frac{\zeta^2}{2}\,\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial x} = \sum \frac{\partial X}{\partial y} = \sum \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$

$$\sum X = \sum X_0 + \frac{\xi^2}{2}\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{\eta^2+\zeta^2}{2}\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)_0 + \xi(\eta + \zeta)\cancel{\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}\right)_0} + \eta\zeta\cancel{\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\right)_0}$$

$$\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \Bigg\| + \frac{\xi^4}{4!}\sum\left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\right)_0 + \frac{\eta^4+\zeta^4}{4!}\sum\left(\frac{\partial^4 X}{\partial y^4}\right)_0 + \frac{6}{4!}\eta^2\zeta^2\sum\left(\frac{\partial^4 X}{\partial y^2\,\partial z^2}\right)_0 + \frac{6}{4!}\xi^2(\eta^2+\zeta^2)\sum\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}$$

$$\sum X = \sum X_0 + \left[\frac{\eta^2+\zeta^2}{2} - \xi^2\right]\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)_0$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -\frac{3}{r^5} + \frac{15(y^2+x^2)}{r^7} - 105\,\frac{x^2y^2}{r^9} \qquad \Bigg\| \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{9}{r^5} + \frac{90\,x^2}{r^7} - 105\,\frac{x^4}{r^9}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum\; & -\frac{9}{r^5} + \frac{90\,x^2}{r^7} - \frac{105\,x^4}{r^9} \\ & -\frac{6}{r^5} + \frac{30(y^2+x^2)}{r^7} - 2\cdot 105\,\frac{x^2y^2}{r^9} \end{aligned}\right\} = -\frac{15}{r^5} + 120\,\frac{x^2}{r^7} + \frac{15(y^2+z^2)}{r^7} - \frac{105\,x^2}{r^7}$$

$$= 0 \quad \text{([illegible])}$$

$$\sum \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \sum -\frac{9}{r^5}\left[1 - 10\,\frac{x^2}{r^2} + \frac{35}{3}\,\frac{x^4}{r^4}\right]$$

$$\sum X = \sum X_0 + \left[2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2\right]\sum\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_0$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-3\cos^2\varphi)\,2\pi\sin\varphi\,d\varphi = 4\pi(\cos\varphi+\cos^3\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Kraft innerhalb einer homogen magnetisierten Vollkugel

$$= 0$$

Mittlerer Wert der X Kraft an einer um 0 gelegten Kugel

Zwischen $2\pi\sin\varphi\,d\varphi\,\cos\varphi\,\frac{e}{R^2}\cos\varphi$ würde sich mit dem analogen Teil der Abschnitte auf der andern Seite aufheben

Unterschied zweiter Ordnung

$$2\pi\sin\varphi\,d\varphi\,R^2\int_{R\cos\varphi-\frac{l}{2}\cos\varphi}^{R\cos\varphi+\frac{l}{2}\cos\varphi} X\,d\xi = 2\pi\int R^2\sin\varphi\,d\varphi\left[U_{R\cos\varphi+\frac{l}{2}\cos\varphi}-U_{R\cos\varphi-\frac{l}{2}\cos\varphi}\right]$$

$$= 2\pi R^2\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\cdot l\cos\varphi\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\Bigg|_{U=\frac{xe}{R^3}} = 2\pi\frac{R^2\,2l}{R^2}\int_0\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi$$

falls: $\frac{le}{Vol} = J$ $\qquad = \frac{4\pi le}{3} = \frac{4\pi J}{3}$

$$\bar X = \frac{1}{Vol}\int X\,dv = \frac{1}{Vol}\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)_\xi dv = \frac{1}{Vol}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dv}{r_1} = \frac{e}{Vol}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{4}{3}\pi\ldots\right]$$

$$= \frac{e}{Vol}\left(\frac{4}{3}\pi\xi\right) = \frac{4}{3}\pi\frac{e\cos\varphi}{Vol}\cdot r_\xi$$

$\bar X$ für einen (irgendwo in der Kugel) exzentrisch angebrachten Dipol $= \frac{4}{3}\pi\frac{el}{Vol}$

$\bar X$ für ganze homogen magnet. Kugel

$$\bar X = \frac{4}{3}\pi J\frac{Vol}{Vol} = \frac{4}{3}\pi J$$

Kraft im Mittelpunkt der Kugel, falls die Dipole ~~...~~ ganz zufällig verteilt sind

Ebenso wie wenn sie mit homogener Dichte verteilt wären

Und zwar wird wieder $K = -\frac{4}{3}\pi J$, wenn auch jene Dipollagen berücksichtigt werden, wo der Mittelpunkt der Kugel von einem Dipol teilweise überdeckt wird, da dann die Kraft K sich auch berechnen lässt aus den beiden Ladungskugeln (falls

alle + vereinigt und alle − vereinigt)

Dagegen wird $K=0$, wenn ~~Dipole~~ der Mittelpunkt frei gelassen wird (cavity), und zwar so dass z.B. Dipol~~e~~ mittelpunkte nur bis zu einer kleinen Kugelfläche um O herum sich annähern können. (deren Radius klein, aber groß im Verhältnis zu l)

Also wenn z.B. jedes Molekül Kugelgestalt besitzt und im Mittelpunkt einen Dipol besitzt, so wird tatsächlich für die auf ein Molekül Inneres wirkende Kraft gerade die Größe K maßgebend sein.

Dagegen wäre statt dessen $\bar{X}$ maßgebend, falls die Moleküle stäbchenform hätten, ~~...~~ welche sich in die Richtung der Kraftlinien stellen.

Dämpfe: $D-1=$ relativ

SO_2 $9{\cdot}93.10^{-3}\left[1-6{\cdot}23.10^{-3}t+1{\cdot}87\,10^{-5}t^2\right]$ $\left[1-3{\cdot}64.10^{-3}t+1{\cdot}34.10^{-5}\right]$

NH_3 $7{\cdot}18\,.10^{-3}\left[1-7{\cdot}60.10^{-3}(t-20)+3{\cdot}61.10^{-5}(t-20)^2\right]$ $\left[1-3{\cdot}42.10^{-3}(t-20)+\sim.\right]$

C_2H_5OH $6{\cdot}47.10^{-3}\left[1-8{\cdot}47.10^{-3}(t-110)+7{\cdot}38.10^{-5}(t-110)^2\right]$ $\left[1-2{\cdot}61.10^{-3}(t-110)+\sim\right]$

383

$$(D-1)=6{\cdot}47.10^{-3}\left\{\left[1+8{\cdot}47.383.10^{-3}+7{\cdot}38.10^{-5}.383^2\right]-\left[8{\cdot}47.10^{-3}+2.7{\cdot}38.10^{-5}\right]T+7{\cdot}38.10^{-5}T^2\right\}$$

~~(D-1)(1+...)~~

$$\frac{1}{1+\frac{t}{273}}=1-\frac{t}{273}+\left(\frac{t}{273}\right)^2$$

also durchwegs stärkere Abnahme, übereinstimmend mit Dipol-hypothese

4362	4669	5832
5638	5331	4168
3072	3412	2611
1276		

1011

3·70

2·25	900	2·02	1444	1·69	16·90	1·47		[illegible]
2·02	404	1·69	676	1·47	10·29	1·36		2205
								1360
0·23 :	4·96	0·33 :	7·38	0·22 :	6·61	0·11	:	8·45

3617		5185		3424		0414		
6955	4·64	8684	4·47	~~9292~~	3·33	9269	1·30	
6662		6504		~~[illegible]~~		1155		
				5222				

1·36 ~~272~~ ~~272~~

1·20 2992

1800

0·16 : 11·92

2041

0763

1278 1·34

$$(\Sigma v)_1 = \frac{v_0}{1+\beta t_1} \qquad n_{12} = \frac{(\Sigma v_1)}{(\Sigma v_2)} = \frac{1+\beta t_2}{1+\beta t_1} = \cancel{\frac{(t_2-t_1)}{1+\beta t_1}}$$

$$(\Sigma v)_2 = \frac{v_0}{1+\beta t_2}$$

$$n_{12}(1+\beta t_1) = 1+\beta t_2$$

$$v_0 \beta t_1 = \frac{v_0}{(\Sigma v_1)} - 1$$

$$\beta v_0 = \frac{1-n_{12}}{t_1 n_{12} - t_2} = \frac{\Sigma v_2 - \Sigma v_1}{t_1 \Sigma v_2 - t_2 \Sigma v_1} = \frac{\Sigma v_1 - \Sigma v_2}{t_2 \Sigma v_1 - t_1 \Sigma v_2}$$

2.34 · 4.68
2.25 — 2.25
0.09 : 2.43

2.34 — ~~16.70~~ 9.36
2.02 — 2.02
0.32 : ~~16.70~~ 7.34

2.34 — 16.38
1.69 — 1.69
0.65 : 14.69

2.34 — 51.48
1.20 — 1.20
1.14 : 50.28 =

9542
3856
5686
370

~~5051~~
~~2227~~
~~2824~~
~~192~~

5051
8657
6394
436

~~2175~~
~~1670~~
~~0505~~

8129
1670
6459
442

0569
7013
3556
227

~~13.40~~
13.40 — 13.40
11.00 — 5.50
2.40 : 7.90

11.00 — 22.00
7.92 — 7.92
3.08 : 14.08

7.92 — 23.76
6.30 — 12.60
1.62 : 11.16

6.30 — ~~16.56~~
4.82 — ~~14.56~~
1.48 : ~~2.04~~

31.50
14.46
17.04

3802
8976
8826

304

4886
1486
3400

219

2095
0476
1619

135

1703
2315
9388

0.869

373 — 37.30
286 — 20.02
087 : 17.28

482 — 33.74
373 — 18.65
1.09 : 15.09

9396
2376
7020
0.503

6374
1787
8587

...go przed
...może mówić
...nięcia" (prac-
...pozdał program
...w, przedewszyst-
...ego „zmostu" ...
...nie przebrzmiały
...przeżniłą poga-
...ybulskiego, staje
...any pracą reżyser
...zą minę, wyjaśnia
...yjnej do „Śmierci
...przez chór „truchel",
...mumij, które zapomocą
...artykułowanych dźwię-
...w rytm „murzyński",
...o, co ruchami „tańcz-
... Puszet. Podczas tych
...wypuszcza z garderoby po
...ętym w prześcieradło,
...kiem i twarzą zasło-
...z papieru. Defektow-

... kech...
...wystarcza, a nowa...
z wieścią o urządzonem już nie z
kanku Narzeczonej w swetrze z naszytemi
asymetrycznie pi...ami i zawiązanymi koń-
cami rękawów) jeszcze go nie uspokają. Jako
kościel tęsknot metafizycznych zapomocą wia-
ry teologicznej zjawia się Juljusz II della
Rovere (w niesłychanie pomysłowym kostju-
mie p. Wicińskiego: postać jego ujęta jest
w tekturowe osie: pionową, w której porusza
się głowa, i poziomą na wysokości ramion;
prawa dłoń zastąpiona liturgiczną przykryw-
ką z krzyżem, lewa wypełniona zwisającym
pierścieniem; zresztą biały ornat i t. d.). Ten
mądry starzec dobija swą żelazną logiką per-
wersyjność malarza, a błogosławiąc jemu i je-
go narzeczonej, życzy jej — nagłej i niespo-
dziewanej śmierci. Życzenie wkrótce się speł-
nia za sprawą kole... szkolnego Pawła, obec-
nie króla Hirkanji, ...dzie panuje absolutyzm
życia. Do kierowania nim poszukuje Hirkan
jeszcze kilku „elitewców". Pierwszy zgłasza
się chodzący za nim jak cień niemy jegomość,
przytakujący każdemu z mówiących. Hirkan
namawia do pójścia z nim Pawła, a gdy temu

króla ...
takuja...
choć ...
miała p...
dyskusję ...
puszczała ...
nością dla re...
niem dla grając...
wszystkiem autora...
stworzył dramat ro...
mi tekstami Gide'a lub
znanych mi awangardzi...
też nie wątpię, że „Matwa
francuski, mi...
w jakimś ...
P. S. Po...
łibyśmy w ...
Witkiewiczow...
ziny innych nie...
nadto „Śmierć F...
i t. p. Tylko ciąg...
tów prowadzi do —

...pod zarządem Leopolda Wójcika ...

$5[\qquad]$

$5(\qquad)$ $5(\qquad)$

$\left(\frac{C}{c}\right)^2 = \alpha$

$$2\alpha\left[1 + x\,\frac{3x+25}{5(x+3)}\right] = \alpha\left[1 + \frac{3x+25}{5(x+3)}\right]$$

$$\frac{\alpha}{2}\left[3x^2+30x+15\right] =$$

$$\frac{\alpha}{2}\left[15 + 3x^2 + 25x\right] = x\left[8x+40\right]$$

$$3\frac{\alpha}{2}\left[x^2+10x+5\right] = 8(x^2+5x)$$

$$x^2\,\cancel{[\ldots]} + x\left[\frac{7-13\alpha}{1-\frac{3\alpha}{2}}\right] = \frac{\frac{3\alpha}{2}}{1-\frac{3\alpha}{2}}$$

$$x^2\left[8-\frac{3\alpha}{2}\right] + x\left[40-15\alpha\right] = \frac{15\alpha}{2}$$

$$x = -\frac{40-15\alpha}{16-3\alpha} \pm \sqrt{(15\alpha)(16-3\alpha)+(40-15\alpha)^2}$$

$$x = -\frac{7-13\alpha}{2-3\alpha} \pm \sqrt{\frac{3\alpha}{2-3\alpha} + \left(\frac{7-13\alpha}{2-3\alpha}\right)^2}$$

$$\cancel{= \frac{-7+13\alpha}{2-3\alpha} \pm \sqrt{6\alpha - 9\alpha^2 + 49 - 14\cdot 13\alpha + 13^2\alpha^2}} \ldots$$

$$1600 - 1200\alpha + 225\alpha^2 = 1600 - 960\alpha + 180\alpha^2$$
$$+240 \quad -45\alpha^2$$

$282 + 6 = 276$ $\qquad$ $269 + 9 = 200$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x^2 + x\,\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$ $\qquad$ $x^2 + 2x = 3$ $\qquad$ $m = M$

$x = 1$ $\qquad$ $c = C$

$\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $x^2 + x\,\dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}$ $\qquad$ $x^2 + 6x = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $m = \frac{M}{3}$

$$x = -3 + \sqrt{\tfrac{3}{5} + 9}$$
$$= -3 + \sqrt{48} \neq 4$$

$C = 2c$

$\alpha = \delta$ $\qquad x^2 + x\,\frac{7-13\delta}{1-\frac{3\delta}{2}} = \frac{3\delta}{2-3\delta}$

$$x^2 + 7x = \frac{3\delta}{2}$$

$$x = \frac{3\delta}{14}$$

$\left(\frac{c}{C}\right)^2 = x$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad C'^2 = C^2\left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right\}$

$m = M$ $\qquad C'^2 - C^2 = \frac{x-1}{2}\,C^2 = \frac{c^2 - C^2}{2}$

$\alpha = \delta$ $\qquad m \ll M$

$$C'^2 = C^2\left\{1 - \delta + x\delta + \left[2\delta^2 - \delta\right]\left[x + \frac{3+25x}{5(1+3x)}\right]\right\}$$

$$= C^2\left\{1 - \delta + \cancel{x\delta} - \cancel{x\delta} - \frac{3+25x}{5(1+3x)}\,\delta\right\}$$

$$= C^2\left\{1 - \delta\,\frac{8+40x}{5(1+3x)} + 2\delta^2\,\frac{3+30x+15x^2}{5(1+3x)}\right\}$$

$= C^2$ jirih

$$\delta\,\frac{3+30x+15x^2}{\cancel{5(1+3x)}} = \frac{4+20x}{\cancel{5(1+3x)}}$$

$$x^2 + 2x + \frac{1}{5} = \frac{4}{3\delta}x + \frac{4}{15\delta}$$

$$x^2 + 2\left[1 - \frac{2}{3\delta}\right]x = \left[\frac{4}{3\delta} - 1\right]\frac{1}{5}$$

$$x = \frac{2}{3\delta} - 1 + \sqrt{\underbrace{\left(\frac{2}{3\delta} - 1\right)^2 + \frac{4}{15\delta}}_{\frac{4}{9\delta^2} - \underbrace{\frac{4}{3\delta} + \frac{4}{15\delta}}_{-\frac{16}{15\delta}} + \frac{4}{5}} - \frac{1}{5}}$$

$$x = \frac{2}{3\delta} - 1 \pm \sqrt{\frac{1}{9\delta^2} - \frac{4}{15\delta} + \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{2}{3\delta}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{12}{5}\delta + \frac{9\delta^2}{5}}\right] - 1$$

$$\mp \frac{4}{3\delta}$$

approx for $x \gg 1$

$$C'^2 = C^2\left\{1 - \frac{8}{3}\delta + 2x\delta^2\right\}$$

$$C'^2 - C^2 = C^2\left\{2x\delta - \frac{8}{3}\right\}\delta$$

$$= \left\{2c^2\delta - \frac{8}{3}C^2\right\}\delta \neq \left\{2c^2\frac{m}{M} - \frac{8}{3}C^2\right\}\frac{m}{M}$$

$$M(C'^2 - C^2) = 2\frac{m}{M}\left[c^2 m - \frac{4}{3}C^2 M\right]$$

Ścisłe jako przybliżenie:

$$E' - E = 2\frac{m}{M}\left[e - E\right]$$

$$\frac{dE}{dn} = 2\frac{m}{M}(e - E)$$

$$E = e - (e - E_0)\, e^{-2\frac{m}{M}n}$$

zbliżenie gdy $n > \frac{M}{2m}$

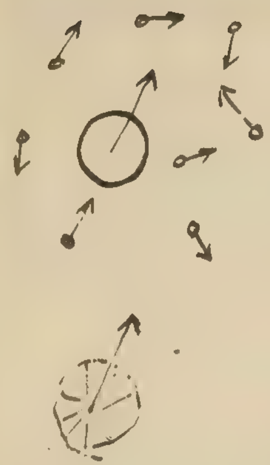
$> 10^{10}$

Supp. $\frac{4a^3}{\sqrt{\pi}} C^2 e^{-C^2a^2} dC$

$$\int_0^\infty C^4 e^{-C^2a^2} dC = \frac{3}{2}\frac{1}{a^2}$$

$$\overline{M(C'^2 - C^2)} = 2\frac{m}{M}\left[c^2 m - 2\,\overline{C^2 M}\right] \;?$$

relative motion



What is the average value of g^2 ?

[after Maxwell prop. V
$= C^2 + c^2$

this is the true average value for ~~possible values of~~ any molec. in the gas

but it is not the average value for any two colliding molecules

for it supposes ~~the~~ all directions of the striking molec. to be equally probable, whilst in reality the probability (number of discs in unit time) of a disc will be proportional to the relative velocity g

---

According to Maxwell's:

$$M \quad C'^2 = C^2 + 2\alpha\left[\alpha(c^2+C^2) - C^2\right]$$

$$m \quad c'^2 = c^2 + 2\beta\left[\beta(c^2+C^2) - c^2\right]$$

$$MC'^2 - mc'^2 = MC^2 - mc^2 + 2\left[(M\alpha^2 - m\beta^2)(c^2+C^2) - (M\alpha C^2 - m\beta c^2)\right]$$

$$MC'^2 + mc'^2 = MC^2 + mc^2 + 2\alpha\left[\cancel{(c^2+C^2)m} - \cancel{MC^2 - mc^2}\right]$$

$$C^2 \frac{\cancel{M^3} - 2mM^2 \cancel{M(m+M)}}{(m+M)^2}$$

$$c^2 \frac{(Mm^2 - \cancel{2M^2}) + mM(\cancel{m+M})}{(m+M)^2}$$

$$= (MC^2 - mc^2)\underbrace{\left[1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right]}_{\frac{(m-M)^2}{(m+M)^2}}$$

$$\cancel{2(\alpha^2+\beta^2)(c^2+C^2)(M+m)^{-} - 2\frac{mM}{m+M}(C^2+c^2) = 2(c^2+C^2)\left(\frac{m+M^2 - mM}{m+M}\right)} = 2(c^2+C^2)\frac{m-M}{m+M}$$

$$2(M\alpha^2 + m\beta^2)(c^2+C^2) - \frac{2mM}{m+M}(C^2+c^2) = 0$$

$$\frac{2mM}{m+M}$$

stimmt

According to our calculation:

$$M \quad C'^2 = C^2 + \alpha\left\{c^2 - C^2 + (2\alpha-1)\left(c^2 + \frac{3C^4+25c^2C^2}{5(C^2+3c^2)}\right)\right\}$$

$$m \quad c'^2 = c^2 + \beta\left\{C^2 - c^2 + (2\beta-1)\left(\cancel{c^2+\frac{3c^4+25c^2C^2}{5(c^2+3C^2)}}\right)\right\}$$

$\cancel{E'+e' = E+e+\alpha\{c^2(M-m) - C^2(M-m) + (2\alpha-1)}$

for $M > m$, $c > C$

$\frac{m-M}{m+M}$ — 0 almost

$$E'+e' = E+e + \frac{mM}{m+M}\left[\frac{m-M}{m+M}\left[\cancel{c^2-C^2} \; c^2 - C^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{3C^4+25c^2C^2}{C^2+3c^2} - \frac{3c^4+25c^2C^2}{c^2+3C^2}\right)\right]\right]$$

$$3C^4c^2 + 25c^4C^2 + 9C^6 + 75c^2C^4 - 3c^4C^2 - 25c^2C^4 - 9c^6 - 75c^4C^2$$

$$\frac{1}{5}\;\frac{9C^6 + 53c^2C^4 - 53c^4C^2 - 9c^6}{(C^2+3c^2)(c^2+3C^2)}$$

$$5(3c^4+3C^4+10c^2C^2)(c^2-C^2)$$

$$+15c^6 + 15c^2C^4 + 50c^4C^2 - 15c^4C^2 - 15C^6 - 50c^2C^4$$

$$= 15c^6 - 45c^2C^4 + 45c^4C^2 - 15C^6 \qquad 3C^4 + 30c^2C^2 + 3c^4$$

$$-6C^6 + 8C^4c^2 - 8C^2c^4 + 6c^6$$

$$E'-e' = E-e + \frac{mM}{m+M}\left[2(c^2-C^2) + 2\frac{m-M}{m+M}\left(c^2 + \frac{3C^4+25c^2C^2}{5(C^2+3c^2)}\right)\right]$$

$$= E-e + \frac{2mM}{(m+M)^2}\left[5(c^2-C^2)(m+M)(C^2+3c^2) + (m-M)(3C^4+30c^2C^2+3c^4)\right]$$

$$m\left[5(3c^4-2c^2C^2-C^4) + 3C^4 + 30c^2C^2 + 3c^4\right] = m\left[18c^4+20c^2C^2-2C^4\right]$$

$$+M\left[\qquad - \qquad\right] + M\left[12c^4 - 40c^2C^2 - 8C^4\right]$$

1). given values OA, OB

$\overline{Oa}^2 = OS^2 + AS^2$ $\qquad$ $\overline{Ob}^2 = OS^2 + BS^2$

$\overline{C'}^2 = C^2 + 2\alpha^2 g^2 + \alpha(c^2 - C^2 - g^2)$ $\qquad$ $\overline{c'}^2 = c^2 + 2\beta^2 g^2 + \beta(C^2 - c^2 - g^2)$

$MC'^2 + mc'^2 = MC^2 + mc^2 + \cancel{2g^2(\alpha^2 M + \beta^2 m) = \frac{mM}{m+M} 2g^2}$

stimmt!

$= C^2 + \alpha(c^2 - C^2) + (\cancel{2\alpha^2 - \alpha})\frac{mM}{m+M} g^2 \quad \Big| \quad = c^2 + \beta(C^2 - c^2) + g^2(2\beta^2 - \beta)$

$C'^2 = C^2 + \alpha\left\{c^2 - C^2 + (2\alpha - 1)\left[c^2 + \frac{3C^4 + 25c^2C^2}{5(C^2 + 3c^2)}\right]\right\}$ $\qquad c > C$

$c'^2 = c^2 + \beta\left\{C^2 - c^2 + (2\beta - 1)\left[c^2 + \frac{3C^4 + 25c^2C^2}{5(C^2 + 3c^2)}\right]\right\}$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2(1+x^2)}\,y\,dy$$

$\sqrt{1+y^2} = z^2$

$y\,dy = z\,dz$

$\int_1^\infty e^{-(z^2-1)}\,dz$

$$= 2\int_0^\infty e^{-y^2} y\,dy \int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1+y^2}} \qquad = \sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, e^{-y^2}\,dy$$

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2} e^{-\alpha x^2}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right) e^{-\alpha x^2}\,dx = J - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

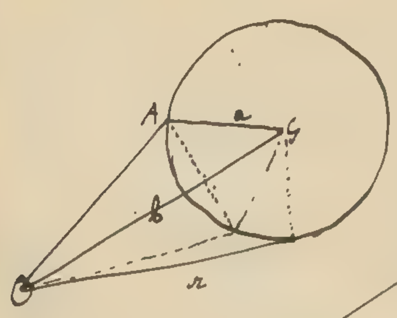
$J = uv$ $\qquad$ $J = -e^{\alpha}\sqrt{\pi}\int^{\sqrt{\alpha}} e^{-x^2}\,dx$

$uv - \frac{\partial u}{\partial \alpha} v - u\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ $\qquad$ $v = \frac{\partial v}{\partial \alpha}$ $\qquad$ $v = e^{\alpha}$

$J + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = J - \dots$

$$u = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\,d\alpha = \sqrt{\pi}\int e^{-\alpha}\,d(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\pi}\int^{\sqrt{\alpha}} e^{-x^2}\,dx$$

Mittlerer absolut wert der Differenz d wk.:



$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$\cancel{\frac{\int r^2 \sin\theta\, d\theta}{\int \sin\theta\, d\theta} = a^2+b^2 - 2\frac{\int_0^\theta \sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\int_0^\theta \sin\theta\, d\theta}\, ab}$$

$$\cancel{\int_1 r_1^2 = a^2+b^2 - ab\sin^2\theta}$$

$$\cancel{\int_2 r_2^2 = a^2+b^2 + ab\sin^2\theta}$$

$$\cancel{\int_1 r_0^2 - r_1^2 = ab(\sin^2\theta - 2\cos\theta)} = ab($$

$$\cancel{\int_2 r_2^2 - r_0^2 = ab(\sin^2\theta - 2\cos\theta)}$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta - (a^2+b^2-2ab\cos\theta_0) = 2ab(\cos\theta_0-\cos\theta)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\int_{\theta_0}^{\pi} 2ab(\cos\theta_0-\cos\theta)\sin\theta\, d\theta + 2ab\int_0^{\theta_0}(\cos\theta-\cos\theta_0)\sin\theta\, d\theta\right\}$$

$$= ab\left[\cos\theta_0\cos\theta\Big|_{\pi}^{\theta_0} + \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{\theta_0}^{\pi} + \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{0}^{\theta_0} - \cos\theta_0\cos\theta\Big|_{\theta_0}^{0}\right]$$

$$= ab\left[\cos^2\theta_0 + \cancel{\cos\theta_0} + \frac{\sin^2\theta_0}{2} + \frac{\sin^2\theta_0}{2} - \cancel{\cos\theta_0} + \cos^2\theta_0\right]$$

$$= ab\left[2\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\right] = ab\left[1+\cos^2\theta_0\right]$$

$$\Delta = \alpha g\sqrt{C^2+\alpha^2 g^2 \underbrace{-2\alpha C g\cos OAG}_{+\alpha(c^2-C^2-g^2)}}\,(1+\cos^2\theta_0)$$

$$= \alpha g\sqrt{C^2(1-\alpha)+\alpha c^2+(\alpha^2-\alpha)g^2}\,(1+\cos^2\theta_0)$$

$C^2 =$

$$\cancel{B = \int g \sqrt{C^2(1-\alpha) + \alpha c^2 + (\alpha^2-\alpha) g^2}\ R}$$

$$C^2 = \alpha^2 g^2 + b^2 - 2\alpha g b \cos\theta$$

$$\cancel{C^2} = \underbrace{\alpha^2 g^2 + \cancel{C^2} + \alpha^2 g^2}_{2\alpha^2 g^2} + \alpha(c^2 - C^2 - g^2) - 2\alpha g b \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{2\alpha g^2 + c^2 \mp C^2 \mp g^2}{2\alpha g b}$$

$$\cancel{\Delta = \alpha g b \left[1 - \frac{2\alpha g^2 - c^2 + C^2 + g^2}{2\alpha g b}\right]^2}$$

~~Suppos.: $c \gg C$~~

$$\Delta = \frac{4\alpha^2 g^2 b^2 + [2\alpha g^2 + g^2 - c^2 + C^2]^2}{4\alpha^2 g^2 b^2}\ \alpha g b$$

$$\cancel{\left(\frac{2\alpha c^2 + C^2}{2\alpha c b}\right)^2}$$

$= \dots$

$mc < MC$

Suppos.: ~~α small~~ ~~$\alpha c \ll C$~~

$$mc = \frac{MC^2}{c}$$

$c \gg C$ $\quad$ α small

$g \neq c$ $\qquad b = \sqrt{C^2(1-\alpha) + \alpha^2 c^2}$

$$\Delta = \alpha c b \frac{\int_0^\pi (1+\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta}{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta} = \alpha c b \left[1 + \frac{-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi}{-\cos\theta\Big|_0^\pi}\right] = \frac{4}{3}\alpha c b$$

If normal state: $\Delta(C^2) = \pm \frac{4}{3}\frac{mcC}{M} = \frac{4}{3}\frac{C^3}{c}$

$$C\Delta(C) = \pm\frac{2}{3}\frac{mcC}{M}$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm\frac{2}{3}\frac{mc}{M}$$

Direct method for $c \gg C$

$$\Delta C = a(\cos\theta - \cos\theta_0) = a(1+\cos^2\theta_0)$$

$$\cancel{\Delta C = \alpha c \frac{\int(1+\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta}{2\int\sin\theta\, d\theta} = \frac{2}{3}\alpha c}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{mc}{M}$$

According to Maxwell:

$$C'^2 = C^2 + 2\alpha\left[\alpha(c^2+C^2) - C^2\right]$$

for α small

$$C'^2 = C^2 + \frac{2m}{M}\left[\frac{mc^2}{M} - C^2\right]$$

$$\Delta(C^2) = \frac{2m}{M^2}(e - E)$$

if $E = 0$

$$\Delta(C^2) = \frac{2m}{M^2}\,e = 2\left(\frac{m}{M}\right)^2 c^2$$

$\overline{O}_a = {}^{\text{if}}\, b$ approx for small α

$$\overline{b}^2 = C^2 + \alpha^2 g^2 + \alpha(c^2 - C^2 - g^2)$$

$$= C^2 + \alpha(c^2 - C^2) + g^2(\alpha^2 - \alpha)$$

$$\overline{\overline{b}}^2 = C^2 + \alpha(c^2 - C^2) + (c^2 + C^2)(\alpha^2 - \alpha)$$

$$= C^2 - 2\alpha C^2 + \alpha^2(c^2 + C^2)$$

$$= C^2(1 - 2\alpha) + \alpha^2(C^2 + c^2)$$

podczas gdy $\overline{\overline{O}}_a^2 = C^2(1-2\alpha) + 2\alpha^2(C^2 + c^2)$ $\quad\Big\|\quad$ $\overline{\overline{b}}^2 \neq C^2 - 2\alpha C^2 + \alpha^2 c^2$

$\overline{\overline{O}}_a^2 \neq C^2 - 2\alpha C^2 + 2\alpha^2 c^2$

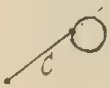
for $C = 0$ $\quad \overline{\overline{O}}_a^2 - C^2 > 0$ dopóki $C^2 = \alpha c^2$

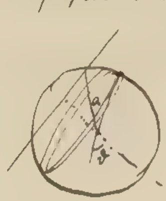
gdy C za małe wtedy $\overline{\overline{b}}^2$ wypada niż C^2, bo koła zewnętrz

gdy C za duże wtedy $\overline{\overline{b}}^2 < C^2$ bo koła excentryczne ku środkowi

Mean value of perpendicular component (for $\frac{c}{C}$ great and $\frac{\delta C}{C}$ small)

perpendic to C, in plane of paper





$a(\cos\theta - \cos\theta_0)$

the same construction as before $= \frac{2}{3}\frac{mc}{M}$ again

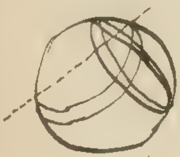
So every chance changes with equal probab. component in dir of motion $\pm \overbrace{\frac{2}{3}\frac{mc}{M}}^{\delta}$

$\perp$ $\pm \frac{2}{3}\frac{mc}{M}$

$\perp\!\!\perp$ $\pm \frac{2}{3}\frac{mc}{M}$

$\cancel{C^2 = \frac{1}{2}\{(C+\delta)^2 + (C-\delta)^2\}}$

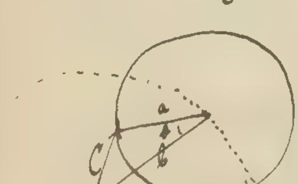
Mean value of perpendicular component all round

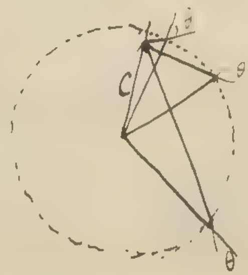


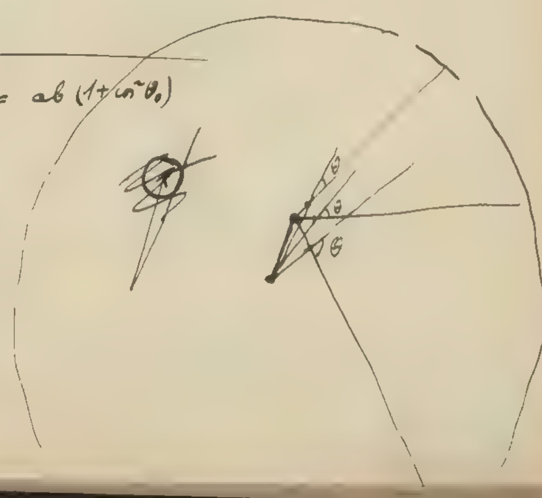
Mean distance of points of sphere from a given line

$c \gg C$ but $\frac{\delta C}{C}$ not small

$\Delta C^2 = ab(1+\cos^2\theta_0)$







$\cos\varphi : \sin\theta = \alpha g : C$

$$\sin\varphi = \frac{\alpha g}{C}\sin\theta \ \mp\ \frac{\alpha c}{C}\sin\theta$$

$$\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\alpha c}{C}\cos\theta\, d\theta$$

$\alpha c \cdot C\,(1+\cos^2\theta)\sin\varphi\, d\varphi$

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta \left(\frac{\alpha c}{C}\right)^2 \frac{\cos\theta\, d\theta\ \sin\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha c}{C}\sin\theta\right)^2}} \quad \left(\frac{\alpha c}{C}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{(1-\sin^2\theta)\sin\theta\, d(\sin\theta)}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha c}{C}\sin\theta\right)^2}}$$

$$= \left(\frac{\alpha c}{C}\right)^2\int_0^1 \frac{(1-x^2)\,x\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha c}{C}x\right)^2}} \quad = \left(\frac{\alpha c}{C}\right)^2 \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2 c^2}{C^2}x}}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{1-ax}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-ax}} - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-ax}}$$

$$= -2\frac{\sqrt{1-ax}}{a} \qquad \qquad = -x\,2\frac{\sqrt{1-ax}}{a} + \frac{2}{a}\int\sqrt{1-ax}\,dx$$

$$= \frac{2}{a}\int\frac{1}{\sqrt{\ }}dx - 2\int\frac{x}{\sqrt{\ }}dx$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{\ }}dx = -\frac{2x}{3a}\sqrt{\ } - \frac{4}{3a}\frac{\sqrt{\ }}{a}$$

$$= \sqrt{1-ax}\left\{-\frac{2}{a} + \frac{2x}{3a} + \frac{4}{3a^2}\right\} = 2\frac{\sqrt{1-ax}}{3a^2}\left[-3a + ax + 2\right]$$

154

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{3a^2}\left[\frac{-a}{2\sqrt{\ }}(3a - ax - 2) + a\sqrt{\ }\right]$$

$$= \frac{1}{3a\sqrt{\ }}\left[3a - ax - 2 + 2 - 2ax\right]$$

$$\frac{2}{a}\sqrt{1-ax} - 2\sqrt{1-ax} + \frac{ax}{\sqrt{\ }}$$

$$-\frac{2\sqrt{\ }}{a} + \frac{x}{\sqrt{\ }} + \frac{2}{a\sqrt{\ }} - \frac{2x}{\sqrt{\ }}$$

$$= \frac{x\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{\ }} = \frac{2\sqrt{\ }}{3a}\left(-x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{\ }}{3a} - \frac{a}{3a\sqrt{\ }}\left(-x + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{3a\sqrt{\ }}\left[-2 + 2ax + ax - 2\right]$$

$$\frac{2\sqrt{1-a}}{3a^2}\Big[\underbrace{-3a + a + 2}_{2(1-a)}\Big] - \frac{2}{3a^2}\left[-3a + 2\right]$$

$$= \frac{2}{3a^2}\left\{3a - 2 + 2\sqrt{1-a}^{\,3}\right\}$$

→ $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha c}{C}\right)^2 \quad \frac{a}{2}\,\frac{2}{3a^2}$

$$a = \left(\frac{\alpha c}{C}\right)^2 = \frac{m}{M}\,\frac{mc^2}{MC^2}$$

$$= \frac{1}{3a}\left[3a - 2 + 2\sqrt{1-a}^{\,3}\right]$$

~~for small values of a~~ $\cancel{\Delta C^2}$

$$(1-a)^{3/2} = 1 - \frac{3a}{2} + \frac{3}{8}a^2$$

$$= 1 - \frac{2}{3a}\left[1 - \sqrt{1-a}^{\,3}\right] = 1 - \frac{2}{3a}\left[\cancel{1} + \left(\cancel{1} + \frac{3a}{2} - \frac{3a^2}{8}\right)\right]$$

divided by $\int$ over $d\varphi$!

$$= \frac{a}{2}\int_0^1 dx = \frac{a}{2}$$

$$= \frac{a}{4}$$

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\Delta C^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{mc}{MC}\right)^2 = 2C\,\Delta C}$$

$$\cancel{\Delta C = \frac{1}{8}\,\frac{m^2c^2}{M^2C^3}}$$

~~for normal state: $\Delta C = \frac{1}{8}\frac{m}{M}$~~

$$\Delta C^2 = \alpha c C\left[1 + \frac{1}{2}\right] = \alpha c C\left[1 + \cancel{\frac{\alpha c}{2C}}\right]$$

for normal state a very small

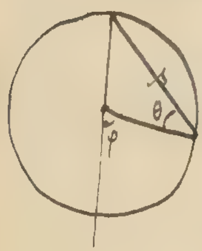
$$= \frac{3}{2}\alpha c C$$

$$\therefore \Delta C^2 = \frac{3}{2}\frac{mcC}{2M} = 2C\Delta C$$

$$\Delta C = \frac{3}{4}\frac{mc}{M}$$

$$\cancel{\int_0^\pi \frac{\cos^2\theta \sin\varphi \, d\varphi}{\int \sin\varphi \, d\varphi}}$$

average value of $\cos^2\theta$:



$$\cancel{2\cos} \quad 1 = 1 + s^2 - 2 s \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{s}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\varphi}$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\int \sqrt{1+\cos\varphi}\,\sin\varphi\,d\varphi}{\int \sin\varphi\, d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\int \sqrt{1+x}\, dx}{\int dx}} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos\varphi}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\int (1+\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\int \sin\varphi\, d\varphi} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^\pi}{\left.\cos\varphi\right|_{-1}^{1}}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Delta C \approx \alpha \frac{(1+\cos^2\theta_0)}{2} \qquad = \alpha g \neq \alpha c$$

$$\overline{\Delta C} = \alpha c \, \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\frac{mc}{M}$$

the same for perpendicular components

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta^2 u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u = u_0 \, \cancel{\ldots} \, \frac{4(\delta x - x^2)}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{8 u_0}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \qquad = u_0 \cdot 4\frac{x}{\delta}\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)$$

$$\Delta^2 u = 8\frac{u_0}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \alpha \delta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad \frac{32 \mu u_0}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0{\cdot}08 \,.\, 3.4 = 1$$

$\delta = 10^{-2}$ $\quad u_0 = 3.10^{-4}$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{10}{0{\cdot}0002} \;(200) = 5.10^4$$

$$6 \pi \mu a u = \frac{4}{3} \pi \frac{a^3}{8_2} \cdot \rho$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{32 \,.\, 0{\cdot}01 \,.\, 10^{-4}}{10^{-6} \,.\, 0{\cdot}0002} = 16.10^4$$

$36 \mu u = a^2 \rho$ $\quad a = 10^{-4}$

$u = \frac{a^2 \rho}{36 \mu}$ $\quad \mu = 0{\cdot}000\,18$

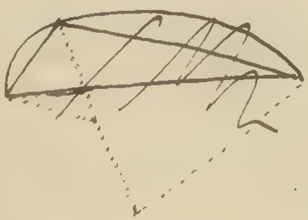
$$\frac{10^{-8}}{36 \,.\, 0{\cdot}00018} = 10^{-6}$$

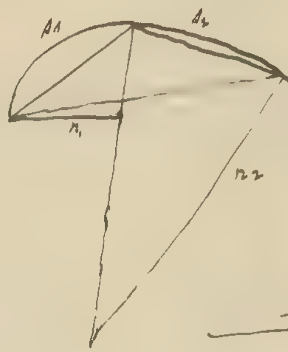
288
65

$= l\varepsilon : l = l : 2r$

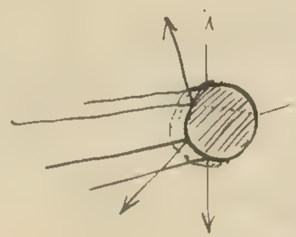
$r = \frac{l}{2\varepsilon}$

$r = \frac{V}{2 n \varepsilon}$





$2 r_1 \sin \frac{A_1}{2 r_1}$



$$\int_0^\delta u \, dx = \frac{4}{\delta^2}\left(\delta \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3}\right) = \frac{2\delta}{3}$$

~~$c^2 < C^2$~~

$$\iint N_1 N_2\, c^2 \int \frac{g^2\,dg}{cC} = \overset{c > C}{\iint N_1 N_2\, c\left(\frac{C^2}{3}+c^2\right)} + \overset{c < C}{\iint N_1 N_2\, \frac{c^2}{C}\left(\frac{c^2}{3}+C^2\right)}$$

$$= \iint C^8 e^{-kC^2}\,dC \int_1^\infty e^{-h\varepsilon^2 C^2}\left(\frac{1}{3}+\varepsilon^2\right)\varepsilon^3\,d\varepsilon + \iint C^8 e^{-kC^2}\,dC \int_0^1 e^{-h\varepsilon^2C^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{3}+1\right)\varepsilon^4\,d\varepsilon$$

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-hxC^2}\left(\frac{1}{3}+x\right)x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{hC^2}+\frac{1}{h^2C^4}\right)e^{-hC^2} + \left(\frac{2}{h^3C^6}+\frac{2}{h^2C^4}+\frac{1}{hC^2}\right)e^{-hC^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\iint e^{-(k+h)C^2}\,dC\left\{\frac{4}{3}\frac{C^6}{h}+\frac{7}{3}\frac{C^4}{h^2}+\frac{2C^2}{h^3}\right\} + \cancel{\frac{C^4}{h^2}} + \cancel{\frac{C^6}{h}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\frac{4}{3}\,\frac{15}{16}\,\frac{1}{h}\,\frac{1}{\sqrt{}^{\,7}} + \frac{7}{3}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{h^2}\,\frac{1}{\sqrt{}^{\,5}} + 2\,\frac{1}{4h^3}\,\frac{1}{\sqrt{}^{\,3}}\right\}$$

$$= \sqrt{\pi}\left\{\frac{5}{8}\,\frac{1}{h}\,\frac{1}{\sqrt{}^{\,7}} + \frac{7}{16}\,\frac{1}{h^2}\,\frac{1}{\sqrt{}^{\,5}} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{h^3}\,\frac{1}{\sqrt{}^{\,3}}\right\}$$

$$\cancel{\int_1^\infty e^{-hx C^2}} \quad \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-hxC^2}\left(\frac{1}{3}+x\right)dx = \frac{1}{6}\left.\frac{e^{-hxC^2}}{hC^2}\right|_\infty^1 + \frac{x}{2}\left.\frac{e^{-hxC^2}}{-hC^2}\right|_1^\infty - \left.\frac{e^{-hxC^2}}{2h^2C^4}\right|_1^\infty$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^{-hC^2}}{hC^2} + \frac{e^{-hC^2}}{2h^2C^4}$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{C^6 e^{-(h+k)C^2}}{h}dC + \frac{1}{2}\int \frac{C^4 e^{-(h+k)C^2}}{h^2}dC$$

$$\frac{15}{16}\frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{(h+k)^7}} \qquad \frac{3}{8}\frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{\pi}{(h+k)^5}}$$

$$= \frac{5}{8}\frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{(h+k)^7}} + \frac{3}{16}\frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{\pi}{(h+k)^5}}$$ stimmt

$$\cancel{h^3k - hk^3 + (k^3-h^3)(h+k)}$$
$$\cancel{= k^3k - hk^3 + k^3h - h^4 + k^4 - h^3k}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{\pi}\,\alpha}{32}\frac{1}{h^3k^3\sqrt{}^7}\{8}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\cdot\alpha}{4}\left[\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{\sqrt{}^5}+\left(\frac{1}{h^3}-\frac{1}{k^3}\right)\frac{1}{\sqrt{}^3}\right] = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{4}\frac{\cancel{k^2-k^2\ldots}}{h^3k^3\sqrt{}^5}$$

$$\cancel{hk^3 - h^3k + k^3h - h^4 + k^4 - h^3k}$$

$$\cancel{= \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{k}{h^3}-\frac{h}{k^3}\right)\frac{1}{\sqrt{h+k}^5}} \qquad \frac{k-h}{h^2k^2}\frac{1}{\sqrt{}^3} + \frac{k^3-h^3}{h^3k^3}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}\ \frac{\sqrt{h+k}}{h^2k^2}$$

$$= \frac{k-h}{h^2k^2\sqrt{}^3}\Big[1+\underbrace{\frac{k^2+kh+h^2}{kh}}_{\frac{(k+h)^2}{kh}}\Big]$$

$$= \frac{(k-h)\sqrt{k+h}}{(kh)^3}$$

$$\cancel{= \alpha\left(\frac{k^3}{h}-\frac{h^3}{k}\right)\frac{1}{(h+k)^3} = \alpha\frac{k^4-h^4}{(k+h)^3 hk} = \alpha\frac{(k^2+h^2)(k-h)}{(k+h)^2 kh}}$$

$$= \alpha\,\frac{k-h}{kh}$$

$$\int C^6 e^{-(\alpha x^2+\beta) C^2} dC = \frac{15}{16}\sqrt{\pi} \int \frac{1}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}^7}$$

$$\frac{15}{16}\sqrt{\pi}\int$$

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-(\alpha x \boxed{+\beta) C^2}} (x+\frac{1}{3})\, dx = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{3}\ \frac{e^{-\alpha C^2}}{\alpha C^2} + \left(\frac{1}{\alpha C^2}+\frac{1}{\alpha^2 C^4}\right) e^{-\alpha C^2}\right\}$$

$$= \frac{e^{-\alpha C^2}}{2}\left\{\frac{4}{3}\ \frac{1}{\alpha C^2} + \frac{1}{\alpha^2 C^4}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\int e^{-(\alpha+\beta) C^2} \left\{\frac{4}{3}\ \frac{C^4}{\alpha} + \frac{C^2}{\alpha^2}\right\} dC = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{3}\ \frac{3}{8\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{(\alpha+\beta)^5}} + \frac{1}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{(\alpha+\beta)^3}}\right\}$$

$$=$$

$$\overline{c^2} = \frac{\int c^4 e^{-hc^2}}{\int c^2 e^{-hc^2}} = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{h^5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{h^3}}} = \frac{3}{2h} \qquad \frac{1}{h} = \frac{2}{3}\,\overline{c^2}$$

10^{-10}

$$\sqrt{\frac{\frac{0{\cdot}0013}{2.10^{19}}}{\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{10^{-12}}{8}}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}\ \frac{0{\cdot}0013}{10^7}} = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 10^{-5}\cdot 48000$$

$$= 0{\cdot}4\ m$$

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi}{= 2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

+.

\-

$$\int N_1 N_2 \int \frac{g^2 dg}{dC} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha^2\beta^2} = \iint C\, c\, e^{-(\alpha+\beta)C^2} \int g^2 dg$$

$$\int C^2 N_1 N_2 \int \frac{g^2 dg}{dC} = -\frac{\partial}{\partial\beta} = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha^2\beta^2}\left[-\frac{2}{\beta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+\beta}\right]$$

$$-\int c^2 N_1 N_2 \int \cdots = \frac{\partial}{\partial\alpha} = +\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha^2\beta^2}\left[-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+\beta}\right]$$

$$\int C^2 + c^2 \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha^2\beta^2}\left[2\left(\frac{1}{\underset{h}{\alpha}} - \frac{1}{\underset{k}{\beta}}\right)\right]$$

$$\frac{\int (c^2 - C^2) N_1 N_2 \int \frac{g^2 dg}{dC}}{\int N_1 N_2 \int \frac{g^2 dg}{dC}} = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\overline{\Delta C^2} = \alpha\left\{2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{k}\right) + 2(2\alpha-1)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{h}\right)\right\}$$

$$= \frac{2m}{m+M}\left\{\frac{1}{k}(1 + 2\alpha - 1) + \frac{1}{h}(2\alpha - 1 - 1)\right\} = 4\alpha\left\{\frac{\alpha}{h} - \frac{1-\alpha}{k}\right\}$$

$$= \frac{4m}{(m+M)^2}\left[\frac{m}{\underset{c^2}{h}} - \frac{M}{\underset{C^2}{k}}\right] = \frac{8}{3}\frac{m}{(m+M)^2}\left[m\bar{c}^2 - M\bar{C}^2\right]$$

$$\Delta \overline{MC^2} = \frac{8}{3}\frac{mM}{(m+M)^2}\left[m\bar{c}^2 - M\bar{C}^2\right]$$

~~If $E = 0$: $2C\Delta C = \frac{8}{3}\frac{m^2}{(m+M)}\bar{c}^2$~~

$$\frac{dE}{dt} = \alpha(e - E)\cdot n$$

$$e - E = (e - E_0)\,\varepsilon^{-ant}$$

$$\int \frac{\left[(c^2 - C^2) + (2\alpha-1)\,\rho^2\right] \rho^2 d\rho\, N_2}{cC}$$

$c^2 = (1-2\alpha)\,\rho^2$

$\rho^2 - c^2 = -2\alpha\rho^2$

$$\int \rho^2 \frac{d\rho}{cC} N_2$$

$$\int \rho^2 \frac{d\rho}{cC} N_2 = \int_{c=C}^{\infty} c\, e^{-hc^2} \left(\frac{C^2}{3} + c^2\right) dc + \int_0^{c=C} c^2 e^{-hc^2} C \left(\frac{c^2}{3} + C^2\right) dc$$

$$\underbrace{\frac{C^6}{15} + \frac{C^6}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\cancel{C^2}=0} x\, e^{-hx} \left(\frac{C^2}{3} + x\right) dx + \frac{2}{5} C^6$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left(\frac{C^4}{3}\left(\frac{1}{h^2} + C^2 \frac{2}{h^3}\right) + \frac{2}{5} C^6\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{C^2}{3} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{C^2}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{h^3} + \frac{2C^2}{h^2} + \frac{C^4}{h}\right) + \cancel{X}$$

$$= \frac{C^2}{h^3} + \frac{7}{6} \frac{C^4}{h^2} + \frac{2}{3} \frac{C^6}{h}$$

$$\int \frac{c^2 \rho^2 d\rho\, N_2}{cC} = -\frac{\partial}{\partial h} \quad = \frac{1}{C}\left[\frac{3C^2}{h^4} + \frac{7}{3} \frac{C^4}{h^3} + \frac{2}{3} \frac{C^6}{h^2} - \frac{C^4}{h^3} - \frac{7}{6} \frac{C^6}{h^2} - \frac{2}{3} \frac{C^8}{h}\right]$$

$$= 3\frac{C}{h^4} + \frac{4}{3} \frac{C^2}{h^3} - \frac{1}{2} \frac{C^4}{h^2} - \frac{2}{3} \frac{C^6}{h}\Big]$$

$$\int e^{-\alpha x} = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$$

$$\int x e^{-\alpha x} dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha} e^{-\alpha x}$$

$$\int x^2 e^{-\alpha x} dx = -2\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^3} - 2\frac{e^{-\alpha x} \cdot x}{\alpha^2} - \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{\alpha} \quad \Big| \quad \int x^3 e^{-\alpha x} = \left(-\frac{6}{\alpha^4} - \frac{6x}{\alpha^3} - \frac{3x^2}{\alpha^2} - \frac{x^3}{\alpha}\right) e^{-\alpha x}$$

$$\int g^4 \frac{dg}{cC} N_2 = \int_{C^2}^{\infty} c\, e^{-hc^2} \left(\frac{C^4}{5} + 2C^2 c^2 + c^4\right) dc$$

$$= \frac{1}{2} \int_{C^2}^{\infty} x\, e^{-hx} \left(\frac{C^4}{5} + 2C^2 x + x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{C^4}{5} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{C^2}{h}\right) + 2C^2 \left(\frac{2}{h^3} + \frac{2C^2}{h^2} + \frac{C^4}{h}\right) + \left(\frac{6}{h^4} + \frac{6C^2}{h^3} + \frac{3C^4}{h^2} + \frac{C^6}{h}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{16}{5} \frac{C^6}{h} + \frac{36}{5} \frac{C^4}{h^2} + 10 \frac{C^2}{h^3} + \frac{6}{h^4} \right\}$$

$h = \alpha = 0$:

$$\frac{3}{h^4} + \frac{4}{3} \frac{C^2}{h^3} - \frac{1}{2} \frac{C^4}{h^2} - \frac{2}{3} \frac{C^6}{h}$$

$$- \frac{3}{h^4} \quad -5 \quad -\frac{18}{5} \quad -\frac{8}{5}$$

$$= -\frac{11}{3} \frac{C^2}{h^3} \Big\| - \frac{41}{10} \frac{C^4}{h^2} - \frac{34}{15} \frac{C^6}{h}$$

mtil:

$$\frac{11}{3} \frac{C^2}{h^3} = 6 \frac{\alpha}{h^4}$$

$$MC^2 = \frac{18}{11} \frac{m}{h} = \frac{18}{11} m \bar{c}^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{12}{11} m \bar{c}^2$$

$$\overline{\Delta C^2} = \int \alpha g b \left[1+\cos^2\theta_0\right] g^2 dg \qquad \cancel{c^2 = C^2 + g^2 - 2gC\cos\theta}$$

$$2\alpha g b \cos\theta = (2\alpha-1)g^2 + c^2 - C^2 \qquad b^2 = C^2 + (c^2-C^2)\alpha + (\alpha^2-\alpha)g^2$$

$$\overline{\Delta C^2} = \int \alpha b \left[1 + \frac{\left[(2\alpha-1)g^2 + c^2 - C^2\right]^2}{4\alpha^2 g^2 b^2}\right] g^3 dg \qquad g^2 = \frac{b^2 - C^2 + (C^2-c^2)\alpha}{\alpha(\alpha-1)}$$

$$g\,dg = \frac{b\,db}{\alpha^2-\alpha}$$

$$= \int \alpha \left\{ b^2 \frac{b^2 - C^2 + (C^2-c^2)\alpha}{\alpha^2(\alpha-1)^2} + \frac{\left[c^2 - C^2 + \frac{(2\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1)}\left[b^2 - C^2 + (C^2-c^2)\alpha\right]\right]^2}{4\alpha^2(\alpha^2-\alpha)} \right\} db$$

$$= \cancel{\int \frac{1}{4\alpha(\alpha-1)^2}\left[4b^4\alpha + b^2\{4\alpha^2(C^2-c^2) - 4C^2\alpha + (2\alpha-1)\ldots\right]} \quad \alpha^2(C^2-c^2) - C^2(2\alpha-1)$$

$$= \int b^2 \frac{b^2 + (C^2-c^2)\alpha - C^2}{\alpha(\alpha-1)^2} + \frac{\left[(2\alpha-1)b^2 + \alpha(\alpha-1)(c^2-C^2) + (2\alpha-1)\left((C^2-c^2)\alpha - C^2\right)\right]^2}{4\alpha^4(\alpha-1)^3}$$

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = n r^{n-2} x \qquad \Big| \qquad \frac{\partial}{\partial x}(r^n x^2) = 2r^n x + n r^{n-2} x^3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = n r^{n-2} + n(n-2) r^{n-4} x^2 \qquad \Big| \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 5n\, r^{n-2} x^2 + n(n-2) r^{n-4} x^4 + 2r^n \; \cancel{+3n r^{n-2} x^2}$$

$10^{14} \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^{4}$

$$3n r^{n-2} + n(n-2) r^{n-2} = 0 \qquad 6 + 5n$$

$$3n + n^2 - 2n = 0 \qquad -\frac{10}{9} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{5}{9} \qquad \frac{1}{5} =$$

$$n^2 + n = 0$$

cutting $\frac{n}{30}$

$$\vartheta_i = \frac{ca}{k}\left[\cancel{1 - \frac{11}{9} + \frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2}}(1-3\cos^2\varphi)\right] \quad \frac{ca}{3k}\left[1 - \frac{r^2}{5a^2}(1-3\cos^2\varphi)\right]$$

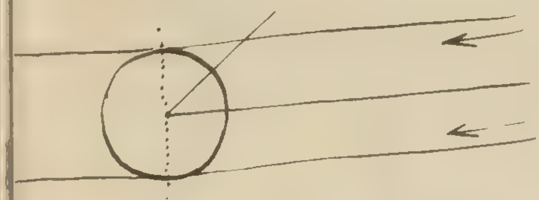
$$\vartheta_a = \frac{ca}{k}\left[\frac{a}{3r} + \frac{5a^3}{9r^3}(1-3\cos^2\varphi)\right] = \frac{ca}{3k}\left[\frac{a}{r} - \frac{a^3}{5r^3}(1-3\cos^2\varphi)\right]$$

$$\vartheta_i\big|_a = \frac{ca}{3k}\left[1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\cos^2\varphi\right] = \frac{ca}{15k}\left[4 + 3\cos^2\varphi\right]$$

$$\Delta\vartheta \sim \frac{ca}{k} \qquad \frac{10^{-4}}{10^{-3}}\frac{1}{30} = \frac{1}{300}$$

Rozkład ciepła w otoczeniu kuli na którą promienie upadają, wytwarzające ciepło c po cm²

uproszczony warunek początkowy przyjmujemy $\cos^2\varphi$ zamiast $\cos\varphi$



$\cancel{K\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{r=a} = c\cos\varphi}$

$\Delta\vartheta = 0$

$$K\left[\left(\frac{\partial\vartheta_a}{\partial r}\right) - \frac{\partial\vartheta_i}{\partial r}\right]_{r=a} = c\cos^2\varphi$$

$\frac{1}{r}$

$\frac{x}{r^3} = \frac{\cos\varphi}{r^2}$

$\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$

$$\vartheta_a = \cancel{A\frac{\cos\varphi}{r^2}}\ \frac{A}{r} + B\frac{1}{r^3}(1-3\cos^2\varphi)$$

$$\cancel{\vartheta_i = \frac{B}{r} + \frac{C\cos\varphi}{r^2}}\quad \vartheta_i = \cancel{\ldots}\, Cr^2(1-3\cos^2\varphi) + D$$

$2C + 3D + A =$

$-\frac{2}{15} - \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = 0$

$$\frac{\partial\vartheta_a}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4}(1-3\cos^2\varphi)$$

$\cancel{\frac{D}{a} = \frac{1}{3} - \frac{2}{45} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}\frac{c}{K}}$

$$\frac{\partial\vartheta_i}{\partial r} = 2Cr(1-3\cos^2\varphi)$$

$$K\left\{2Ca(1-3\cos^2\varphi) + \frac{A}{a^2} + \frac{3B}{a^4}(1-3\cos^2\varphi)\right\} = c\cos^2\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} 2Ca + \frac{A}{a^2} + \frac{3B}{a^4} &= 0 \\ 2Ca + \frac{3B}{a^4} &= -\frac{c}{3K} \end{aligned}\right\}$$

$\frac{A}{a^2} = \frac{c}{3K}$

$\frac{B}{a^4} = -\frac{c}{9K} - \frac{2Ca}{3} = \cancel{-\frac{5c}{9K}}$

$= -\frac{c}{15K}$

$\frac{B}{a^4} = -\frac{3}{45}\frac{c}{K} = Ca$

$\cancel{\vartheta_a = \frac{ca^2}{3Kr} - \frac{ca^4}{9Kr^3} + \frac{2Ca^5}{3r^3}(1-3\cos^2\varphi)}$

$\cancel{= \frac{4c}{9K}}$

$\frac{5}{3} = -\frac{c}{9K}$

$\cancel{\frac{ca}{3K} - \frac{ca}{9K} - \frac{2Ca^2}{3} = Ca^2}$

$$\therefore \frac{A}{a} + \frac{B}{a^3}(1-3\cos^2\varphi) = Ca^2(1-3\cos^2\varphi) + D$$

$\cancel{2ca} = 3Ca^2K$

$C = \frac{2c}{3aK}$

$D = -\frac{5ca}{9K} - \frac{2ca}{3K} = -\frac{11ca}{9K}$ | $\frac{A}{a} + \frac{B}{a^3} = Ca^2 + D$ // $\cancel{A} + \frac{B}{a^3} = Ca^2$

$$2\pi a \,\delta T^{\frac{ca}{\kappa}} = 6\pi\mu a u$$

$$u = \frac{\delta T}{3\mu} \qquad \delta T = \frac{\frac{1}{5}\,\frac{1}{300}}{3.\ 0{\cdot}01} = \frac{1}{45}$$

$$\bar\Lambda = l\sqrt{\frac{2n}{\delta}} = l\sqrt{\frac{64n}{9}\left(\frac{MC}{mc}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{n}}\;\frac{MC^2}{mc}$$

$$l = \frac{C}{n}$$

$$2m - n = \varepsilon$$

$$m = \frac{n+\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{n!}{m!\,\overline{n-m}!} = \frac{1}{2^n}\,\frac{n!}{\frac{n+\varepsilon}{2}!\;\frac{n-\varepsilon}{2}!}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2^n}}\,\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\cancel{e}}\right)^n \quad \cancel{(2e)^n}}{\sqrt{2\pi\frac{(n+\varepsilon)(n-\varepsilon)}{4}}\left(\frac{n+\varepsilon}{\cancel{2e}}\right)^{\frac{n+\varepsilon}{2}}\left(\frac{n-\varepsilon}{\cancel{2e}}\right)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,\frac{\cancel{2}}{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}\,\frac{n^{\frac{n+\varepsilon}{2}}\;n^{\frac{n-\varepsilon}{2}}}{(n+\varepsilon)^{\frac{n+\varepsilon}{2}}\cdots} = \sqrt{\frac{2n}{\pi(n^2-\varepsilon^2)}}\sqrt{\left[\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{n}}\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)^{1-\frac{\varepsilon}{n}}}\right]^n}$$

$$= \sqrt{\cdots}\;\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{n}}}$$

$$(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x} = 1 + x(1+x) + \frac{x^2}{2}(1+x)^2 + \cdots$$

$$= \left(1 + x + \frac{3x^2}{2}\right)\left(1 - x + \frac{3x^2}{2}\right) =$$

$$= \left.\begin{matrix} 1 + x + \frac{3x^2}{2} \\ -x - x^2 \\ +\frac{3x^2}{2}\end{matrix}\right\} = 1 + 2x^2 \qquad \sqrt{\frac{1}{\left[1+2\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2\right]^{\frac{n^2}{2\varepsilon^2}\cdot\frac{2\varepsilon^2}{n}}}} \quad \sqrt{\frac{1}{e^{\frac{2\varepsilon^2}{n}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{\pi(h^2-\varepsilon^2)}}\; e^{-\frac{\varepsilon^2}{h}} \qquad = \sqrt{\frac{2}{h\pi}}\; e^{-\frac{\varepsilon^2}{h}}$$

$\int e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ 163

$\int x^2 e^{-\dots} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{h\pi}}\; e^{-\frac{\varepsilon^2}{h}} d\varepsilon$$

$\mu = \frac{\lambda c \rho}{3}$

$$x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

$$\sqrt{\frac{\cdot}{\pi}}\int \left(\frac{C}{A}\right)^2 e^{-\left(\frac{C}{A}\right)^2} d\left(\frac{C}{A}\right)$$

4.10^{19}

$r = \frac{\mu}{n m}$

$3RT = 3\frac{p}{\cdot} = \cdot\, c^2$

$m = \frac{0.00129}{4.10^{19}}$

$\Lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{c}{n\sqrt{\mu}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\; c \sqrt{\frac{m}{r\mu}}$

$\frac{p}{\rho} = \frac{10^6}{0.00129}$ $\quad \rho = \cdot\, m n$

$\sqrt{\frac{3p}{\rho} \cdot \frac{0.00129}{4.10^{19}}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{r\mu}} \cdot \underbrace{c\sqrt{m}}_{= \sqrt{\frac{RT}{N}}}$

$R = \frac{10^6}{273 \cdot 0.00129}$

$\frac{3}{8}\frac{10^{-13}}{273} = 2 \cdots 10^{-16}$

$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \cdots \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$ $\quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdots 1$

$mc^2 = 3\frac{RT}{n}$

$\sqrt{m}\,c = \sqrt{\frac{3RT}{n}} = \sqrt{3\frac{p}{\rho n T}} \cdot T$

$\frac{3.10^6 \cdot 0.00129}{6.10^{19} \cdot 0.00129 \cdot 273}$

$\sqrt{\frac{8.31 \cdot 10^7}{\cdot\, 10^{23}} \cdot \frac{\cdot}{\cdot\, 0.135 \cdot 0.0001}}\; 10^{16} = \sqrt{0.83}\,\sqrt{10^{-8}}$

$= 0.8 \cdot 10^{-4}$

$= 8 \cdot 10^{-5}$

$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{4.6 \cdot 10^5}{\frac{10^{-4}}{2} \cdot 10^{14}} \sqrt{\frac{30}{18}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \cdot 4.6 \cdot 10^{-5}$

$\frac{8.3}{4} \cdot 10^{-16}$

$N = \frac{6.10^{19}}{0.00129}$ $\quad R = 3\frac{p}{\rho \cdot T}$

$$\Lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \quad \frac{c}{R\sqrt{p}}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{c}{N}}$$

$$\sqrt{\frac{RT}{N}} \frac{1}{3\pi\mu R}$$

$$c\sqrt{\frac{m}{3\pi\mu R}}$$

$$r = \frac{u}{r m}$$

$$\frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\frac{3\pi\mu R}{m}}}{R\sqrt{p}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{u}{R m}}$$

$$\sqrt{\frac{24}{R\,4}}$$

$$m = \frac{0{\cdot}00129}{N} \frac{m}{m_0} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{0{\cdot}00129}{4.10^{19}} = \frac{m}{m_0} \cdot 3{\cdot}2 \,.\, 10^{-23}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{0{\cdot}00129}{N.} \frac{m}{m_0}} = \sqrt[3]{\frac{m}{m_0} 32.\, 10^{-24}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{m}{m_0}} \cdot 10^{-8}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{m}{m}}$$

$$\mu = 0{\cdot}01 \qquad v = \frac{0{\cdot}01}{\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{4}{3}} . 10^{-30}} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^{3/4} . 10^{28}$$

$$10^{-4} . 10^{14} = 10^{10}$$

$$\sqrt{\frac{001.\, 10^{-4}}{3 . 10^{-23}}} = \sqrt{\frac{1}{3} 10^{14}} = \frac{10^{8}}{\cancel{\sqrt{3}}} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{r}{R}} = \sqrt{\frac{3.10^{-8}}{10^{-4}}} = \sqrt{3}.10^{-2}$$

$$\frac{5.10^{5}}{\sqrt{10}\,\sqrt{3}.10^{8}} = \frac{5 \,.\, 10^{-3}}{\sqrt{30}} = 10^{-3}$$

$$\sqrt{RT} = \sqrt{10^{9}} = 3.10^{4}$$

$$\sqrt{\frac{8{\cdot}31.10^7}{4.10^{23}}.273} = \sqrt{2.10^{-16}.273} = \sqrt{5{\cdot}5}.10^{-7}$$

$$= \sqrt{\frac{RT}{N}} \qquad = 2{\cdot}5.10^{-7}$$

$$\sqrt{3\pi\mu R} = \sqrt{10.\ 001.\frac{10^{-4}}{2}}$$

$$= \sqrt{5.10^{-6}} = 2.10^{-3}$$

$$10^{-4}$$

$$= 0{\cdot}001\ \frac{mm}{sec}$$

Stunt

$$\frac{2{\cdot}8}{5{\cdot}3}\cdot\frac{5.10^4}{\frac{10^{-4}}{2}\ 10^{14}} = \frac{1}{2}\ 10^{-5}\ \text{Seml.}$$

$$4.\frac{1{\cdot}42}{3}\ \frac{48000}{78.10^{-4}}\ 10^{-14}$$

$$\sqrt{2D} = \sqrt{\frac{16}{27}}\ \frac{c}{R\sqrt{\pi\nu}}$$

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

$$D\frac{\partial\rho}{\partial x} = M\,(\nu)\,u$$

$$\frac{1}{6\pi\mu R(\nu)}\frac{\partial\Pi}{\partial x} = RT\,\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

$$D = \frac{M(\nu)}{6\pi\mu R}(\kappa T)$$

$$(\kappa T) = R_0T\ \frac{m}{M}$$

$$= \frac{(\nu)(R_0T)\,m}{6\pi\mu R}$$

$$\sqrt{\frac{(R_0T)\,m}{3\pi\mu R}}$$

$$\sqrt{\frac{c^2m}{9\pi\mu R}} = \frac{c\sqrt{m}}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\mu R}}$$

$$(RT)_0\,m = \frac{c^2m}{3}$$

$$\sqrt{10^{-16}.273} = \sqrt{2}.10^{-7}$$

$$R = 3.10^6$$

$$m = 3.10^{-23}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{3}.10^{23}$$

$$c = 5.10^4$$

$$m = 32.10^{-23} = 32.10^{-24}$$

$$c\sqrt{m} = 5.10^4\sqrt{32}.10^{-12}$$

$$= 3.10^{-7}$$

$$\frac{3.10^{-6}}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{10^{-6}}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ 10^{-3}$$

$$mc^2 = \frac{3RT}{n}$$

$$c\sqrt{m} = \sqrt{3\frac{RT}{n}}$$

$$= \sqrt{3.\frac{10^6}{0{\cdot}001\ .\ 4.10^{19}}}$$

$$= \sqrt{2.10^{-10}} = 10^{-5}$$

$$D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$D\frac{\partial\rho}{\partial x} =$$

$\frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{3R\mu\pi}}$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\pi\sigma^2} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{n\pi R^2}$$

Einstein for gas molecules?

$$\lambda_x = \sqrt{(RTm)}\sqrt{\frac{1}{3\pi\mu R}} = c\sqrt{\frac{m}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{3\pi}\sqrt{\mu R}}$$

$$\mu = \frac{\lambda c \rho}{3}$$

$$\mu = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\,\frac{c\,\cancel{\rho}\, m}{\cancel{\rho}\, R^2}$$

$$\cancel{= \frac{c\sqrt{m}}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda c\rho R}}}$$

$$= \frac{c\sqrt{m}}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\,\frac{cm}{R}}} = \sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}}\quad\sqrt{cR}$$

in reality $\lambda_x = \sqrt{c\lambda}$

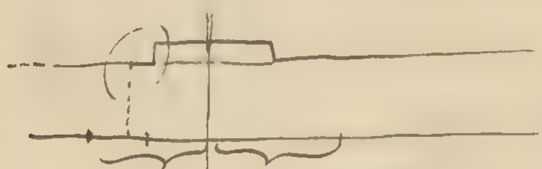
$$= \sqrt{4.10^4 .\ 3.10^{-8}} = \sqrt{10^{-3}}$$

$$= \frac{1}{3}10^{-1}$$

$$= \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.0003}{0.001}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$x+\lambda - x+\lambda$



$\lambda\sqrt{n} = \sqrt{c\lambda}\qquad \sqrt{4.10^4 .\ 10^{-5}} = 1$

$$\frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{\pi}}\sqrt{3\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{32}{27}}$$

165

$$\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y}{\lambda}}}{y}dy\Big\{\int_0^{x-y} \quad - \int_0^{x+y}\frac{dz}{2\lambda}\int_z^\infty \frac{e^{-\frac{\rho}{\lambda}}}{\rho}d\rho\Big\}$$

$$\int dz\int_z^\infty \frac{e^{-\frac{\rho}{\lambda}}}{\rho}d\rho = z\int_z^\infty \frac{e^{-\frac{\rho}{\lambda}}}{\rho}d\rho + \int \cancel{z}\frac{e^{-\frac{z}{\lambda}}}{\cancel{z}}dz$$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$

$\frac{3}{8}$

$$\cancel{\int \sin t^2 q\lambda \cdot \cos q x\, dq =}$$

$$3 = \frac{1}{2\sqrt{D}}$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{4Dt}}\,.dv$$

$$\frac{4\pi}{8\sqrt{\pi D t}^3}\int_0^\infty \underbrace{r^2 e^{-\frac{r^2}{4Dt}}dr}_{\frac{1}{4}\sqrt{\pi(4Dt)^3}} =$$

$$\frac{5.10^4 . 6.10^{-12}}{3\sqrt{10^{-4}.10^{-4}}}$$

$$= \frac{5.10^4 . 3.10^{-23}}{\frac{8}{8}.10^{-16}} = \frac{10^{-3}}{8}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(Dt)}^3}\int r^4 e^{\cdots} dr =$$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha}$$

$$= \frac{3}{2}\,4Dt = 6Dt$$

$$\Lambda_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\;\frac{1}{R}\sqrt{\frac{c}{N}}$$

$$\sqrt{\frac{5.10^4}{4.10^{19}}} = \frac{3.10^{-8}}{10^{-4}} = 3.10^{-4}$$

$$\Lambda_2 = \frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{3\pi}}\;\frac{1}{\sqrt{\mu R}} \qquad \mu = \rho\frac{c\lambda}{3} = \frac{c\, m}{12\sqrt{2}\pi \ldots}$$

$$= \frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{3\pi}}\;\frac{\sqrt{4\sqrt{2}\,\lambda}}{\sqrt{R}\sqrt{cm}}.r = \sqrt{4\sqrt{2}}\;\sqrt{\frac{c}{R}}.r$$

$$\frac{\Lambda_2}{\Lambda_5} = \sqrt{\ldots RN}\ldots$$

$$\cancel{10^{-8}\, 10^{-4} . \frac{3}{4} . 4.10^{19} =}$$

$$\sqrt{3.10^7} = 5\times10^3$$

$$= r\sqrt{RN}\ldots$$

$$= \frac{3.10^{-8}}{2}\sqrt{10^{-4}.2.10^{19}} = 6.10^{-1} = 0'6$$

mobbing on Dichte!!?

$$\sqrt{\frac{5.10^4 . 3.10^{-8}}{10^{-4}}} = 6.10^{-4}$$

$$= 1'5.10^{-3}$$

$$\sqrt{5.10^4 . 10^8 . 3} = 4.10^{-2}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

II.

Particles which are much smaller than mean length of free path experience resistance:

whole number of coll. : $R^2\pi Nc$

average vel. of gas mol. = 0

~~resistance would be~~

Strictly speaking, the spherical particle dragged along in X by force F will not pursue a straight path but zigzag line

If we don't mind the lateral deviations the resistance can be calculated by adding the components of momentum in direction of X

Approximate calcul. : normal number of coll. in three dir.; in X : $\frac{R^2\pi Nc}{3}$

half of them either side : $\frac{R^2\pi Nc}{6}$

momentum $\frac{R^2\pi}{6} N m \left[(c+u)^2 - (c-u)^2\right] = \frac{2}{3} R^2\pi \underbrace{Nm}_{\rho} cu$

apparent resistance: $\frac{2\pi}{3} R^2 \rho c u$ ‖ whilst the ordinary formula $\cancel{6\pi} R \mu^2$ $\frac{c \cancel{\rho}}{\pi^2 N}$

but condition : $\lambda \gg R$ $R : \frac{1}{\ldots}$

Putting this in, in E.'s argumentation:

$$D \frac{\partial \rho}{\partial x} = M p \frac{1}{\frac{2\pi}{3} R^2 \rho c p} (R) T \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$D = \frac{M \; (R) T}{\frac{2\pi}{3} R^2 \rho c} = \frac{c^2 m}{\frac{2\pi}{3} R^2 c m N} = \frac{3}{2\pi} \frac{c}{R^2 N}$$

nearly identical with Sm.!

condition $R < \lambda$

$R < 10^{-4}$ mm $= 0.1 \mu$ for ordinary pressure

Sm. calculates (here) resistance as if in a gas without mass motion and undisturbed by motion of particle itself.

E. as if gas were homogeneous medium

Sm. gets higher values of resist. and therefore slower motion of particles.

In the other calculation:

Sm. does not ~~take~~ into account the imparting of motion by the particle to the surrounding region, which must have the effect of favouring the maintenance of direction of the relative velocity in time comparable with apparent $\bar{c}$!

Fundamental objection to Sm.'s previous method: independance of collisions.

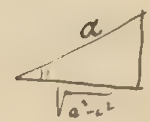
If whole surrounding ~~liquid~~ had the same motion method I. would give irregular mol. collisions superposed over regular translatory motion C, that is velocity chiefly C, with superposed [illegible]

after II. no resistance at all, but motion with C, and superposed oscillations (here neglected)

$$6\pi\mu u\,\frac{8}{3}\,\frac{A^3}{A^3\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\Delta}+c^2A^3\int_0^\infty\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\Delta}}=16\pi\mu u\,\frac{1}{\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\Delta}+c^2\int_0^\infty\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\Delta}}$$

$$\Delta=(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}$$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(a^2+x)\sqrt{c^2+x}}\left[1+\frac{c^2}{a^2+x}\right]\qquad c^2+x=y^2$$



$$\int_c^\infty\frac{2y\,dy}{(y^2+a^2-c^2)y}=2\int_c^\infty\frac{dy}{y^2+a^2-c^2}=\cancel{2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}}\int_c^\infty\frac{\frac{dy}{\sqrt{a^2-c^2}}}{\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)\Bigg|_c^\infty=\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{\pi}{2}-\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}}_{=\arcsin\frac{c}{a}}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial a}=-\int_0^\infty\frac{2a\,dx}{(a^2+x)^2\sqrt{c^2+x}}=-\pi\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}^3}+\frac{2a}{\sqrt{a^2-c^2}^3}\arcsin\frac{c}{a}+\underbrace{\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}}\frac{\frac{c}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}}$$

$$2\,\frac{\frac{c}{a}}{a^2-c^2}$$

$$N=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-c^2}}-\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}}\arcsin\frac{c}{a}$$

$$+\frac{\pi c^2}{2\sqrt{a^2-c^2}^3}+\frac{c^3}{a^2(a^2-c^2)}-\frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}^3}\arcsin\frac{c}{a}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\pi-2\arcsin\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2-c^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{c}{a}\right)-\frac{c^3}{a^2(a^2-c^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2-c^2}\left[\frac{2a^2-c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\arccos\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}-\frac{c^3}{a^2}\right]=\frac{1}{\frac{a}{c}-c^2}\left[\frac{\frac{2a}{c}-c^2}{\sqrt{\frac{a}{c}-c^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{c^3}{a}}\right)-\frac{c^3}{a^2}\right]=$$

$a^2 c = A^3 = \varepsilon$

$a^2 = \frac{\varepsilon}{c}$

$\frac{-\frac{1}{2}\,-\frac{3}{2}}{1.2}$

$N = \pi\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}-c^2}} + \frac{\frac{\varepsilon}{c}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}-c^2}}\right]$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5}{16}x^6$ 167

$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\quad}} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{8.5} = \arcsin x$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}\right.$

$\frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,2\,3} = \frac{5}{16}$

$\left[\frac{\sqrt{\frac{c^3}{\alpha}}\,(3\alpha - 2c^3)}{\sqrt{\frac{\alpha}{c}-c^2}} - c^2\right]$

$\frac{\partial}{\partial c} = \frac{+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}-c^2}^{\,3}}\left[+\frac{\varepsilon}{c^2}+2c\right]\left[1+\frac{\varepsilon}{2c}\right] - \frac{\varepsilon}{2c^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}-c^2}}$

$= \frac{\left(c+\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2c}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}-c^2}^{\,3}} - \frac{\frac{\varepsilon}{2c^2}\left(\frac{\varepsilon}{c}-c^2\right)}{\sqrt{\quad}^{\,3}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\quad}^{\,3}}\left[c + \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2c^3} - \frac{\varepsilon^2}{2c^3} + \frac{\varepsilon}{2}\right]$

Supp. $c = a(1-\delta)$

$\arcsin(1-\delta) = \arccos\sqrt{1-(1-\delta)^2} = \arccos\sqrt{2\delta-\delta^2}$

$\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\delta) = \arccos(1-\delta) = \quad \sqrt{2\delta-\delta^2} + \frac{\sqrt{2\delta-\delta^2}^{\,3}}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}\sqrt{\quad}^{\,5}$

$\frac{1}{a\sqrt{2\delta-\delta^2}}\left[2\left\{\sqrt{2\delta-\delta^2} + \frac{\sqrt{\quad}^{\,3}}{6} + \right\}\right]\left[1 + \frac{1}{2(2\delta-\delta^2)}\right] - \frac{2(1-\delta)}{2\delta-\delta^2}$

$= \frac{1}{a}\left[2 + \frac{2\delta-\delta^2}{0}\right.$

$\frac{1}{\alpha - c^3}\cdot\left[\frac{(3\alpha-2c^3)}{\sqrt{\frac{\alpha}{c}-c^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{c^3}{\alpha}}\right) - c^2\right]$

$$2\int_c^\infty \frac{dy}{(y^2+a^2-c^2)^2}$$

$$\cancel{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \int \frac{}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right]^2}}$$

$$\cancel{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial a} \int \frac{2a\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}$$

$$\int_c^\infty \frac{dy}{y^2+a^2-c^2} = \frac{y}{y^2+a^2-c^2} + \frac{2y^2\,dy}{(y^2+a^2-c^2)^2}$$

$$\int_c^\infty \frac{y^2\,dy}{(\quad)^2} = \frac{1}{2}\int_c^\infty \cdots + \frac{c}{2a^2}$$

$$(a^2-c^2)\int \frac{1}{(y^2-\quad)^2} = \int \frac{1}{y^2+a^2-c^2} - \int \frac{y^2}{(\quad)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2\ldots} - \frac{c}{2a^2}$$

$$\int_c^\infty \frac{dy}{(y^2+a^2-c^2)^2} = \frac{1}{(a^2-c^2)}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-c^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\arcsin\frac{c}{a}\frac{1}{2} - \frac{c}{2a^2}\right]^{(\cdot 2)}$$

$$= -\frac{1}{2\delta-\delta^2}\left[\cancel{\chi} + \frac{2\delta-\delta^2}{2.3} + \frac{3(2\delta-\delta^2)^2}{8.5} \;\ldots\; -(\cancel{\chi}-\delta)\right]$$

$$= \frac{1}{2\delta-\delta^2}\left[\frac{4\delta}{3} - \frac{\delta^2}{60}\right] = \frac{1}{1-\frac{\delta}{2}}\;\cancel{2\delta}\left(\frac{2}{3} - \frac{\delta}{120}\right)$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{3}{20}$$

$$\frac{9-10}{60}$$

$$\frac{1}{a}\left\{2\left[1+\frac{\delta}{3}\right]+\frac{\frac{2}{3}-\frac{\delta}{120}}{1-\frac{\delta}{2}}\right\} = \frac{1}{a}\left\{2+\frac{2\delta}{3}+\frac{2}{3}-\frac{\delta}{120}+\frac{\delta}{3}\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\frac{8}{3}+\frac{119}{120}\delta\right\}$$

$a^2 c = \varepsilon$

$a^3(1-\delta) = \varepsilon$

$\delta = 1 - \frac{\varepsilon}{a^3}$

$$\frac{1}{a}\left\{\frac{8}{3}+\frac{119}{120}\left(1-\frac{\varepsilon}{a^3}\right)\right\}$$

$$x\left\{\frac{\cancel{439}}{120} - 119\,\varepsilon x^3\right\}$$

320

119

$439 - 476\frac{\varepsilon}{a^3}$

If shocks not equally distributed but lateral drift B, what effect?

$(c+B)$ $(c-B)$ produce apparent force: $\frac{2}{3}R^2\pi\rho c B$

deviation during time $\frac{1}{n\delta}$ $=$ $\dfrac{\frac{2}{3}R^2\pi\rho c\,C}{\cancel{R^2\pi\rho\,n}}\left(\frac{1}{n\delta}\right)^2$

relation to straight way: $\dfrac{c}{2R}\dfrac{1}{n\delta}$ 10^{-12}

$\delta = 10^{-7}$

$n = 10^{20}$

$c = 10^5$

$R = 10^{-4}$

component velocity acquired

$$\frac{\frac{2}{3}R^2\pi\rho c B}{\frac{4}{3}R^3\pi\rho} \;\;\;\; \frac{c\,C}{2R\;n\delta}$$

relat. values of vel. $\dfrac{\cdot}{2R\,n\delta}$ $=$ 10^{-4}

For gas: $n = R^2\pi N c$

$$\frac{\frac{2}{3}R^2\pi\rho\cancel{c}\,C}{\cancel{R^2\pi N \frac{m}{\cdot}\,C}} = \frac{2}{3}\frac{\rho}{Nm} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha - c^3}\left[\frac{\cancel{2}\alpha - \cancel{c}^3}{\sqrt{\frac{\alpha}{c} - c^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}\right) - \frac{c^4}{a^2}\right]$$

$$\underbrace{\beta = \sqrt{2\delta - \delta^2}}$$

$$\beta + \frac{\beta^3}{2.3} + \frac{3\beta^5}{2.4.5}$$

$$\frac{c}{a} = 1 - \delta$$

$$\alpha = a^2 c$$

$$\left.(1-\delta)^2 = \frac{c^2}{a^2}\right\} c^3 = \alpha(1-\delta)^2$$

$$c = \sqrt[3]{\alpha}\,(1-\delta)^{2/3}$$

$$\frac{c^5}{a^2\alpha} = (1-\delta)^4$$

$$\frac{1}{c}\;\frac{1}{1-(1-\delta)^2}\left\{\frac{3 - 2(1-\delta)^2}{\sqrt{\frac{1}{(1-\delta)^2} - 1}}\Big| \qquad \Big| - (1-\delta)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{c}\;\frac{1}{2\delta - \delta^2}\left\{\frac{(1+4\delta-2\delta^2)(1-\delta)}{\sqrt{2\delta-\delta^2}}\left[\sqrt{2\delta-\delta^2} + \frac{\sqrt{}^{\,3}}{2.3}\right] - (1-\delta)^2\right\}$$

$$= \frac{(1-\delta)}{c}\;\frac{1}{2\delta-\delta^2}\left\{(1+4\delta-2\delta^2)\left[1 + \frac{2\delta-\delta^2}{2.3} + \frac{(2\delta-\delta^2)^2\,3}{2.4.5}\right] - 1 + \delta\right\}$$

$$\left\{\cancel{1} + 4\delta - 2\delta^2 + \frac{2\delta - \delta^2}{3\ 6} + \frac{4\delta^2}{3} + \frac{3.4\delta^2}{2.4.5} - \cancel{1} + \delta\right\}$$

$$\frac{1}{2\delta-\delta^2}\left\{\frac{16\delta}{3} - \frac{8\delta^2}{15}\right\}$$

$$2 + \frac{1}{6} - \frac{4}{3} - \frac{3}{10}$$

$$\frac{60+5-40-9}{30} = \frac{16}{30}$$

$$= \frac{(1-\delta)}{c}\;\frac{\frac{8}{3} - \frac{4\delta}{15}}{1 - \frac{\delta}{2}} \qquad = \frac{8}{3}\;\frac{1-\delta}{1-\frac{\delta}{2}}\;\frac{1 - \frac{\delta}{10}}{(1-\delta)^{2/3}}\;\frac{1}{\alpha^{1/3}}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt[3]{\alpha}\;\underbrace{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\left(1-\frac{\delta}{10}\right)\left(1+\frac{2}{3}\delta\right)}$$

$$\begin{array}{r} -15 \\ -3 \\ +10 \end{array}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt[3]{\alpha}\left(1 - \frac{8\delta}{30}\right)$$

$$\frac{16\pi\mu u A}{\frac{8}{3}A\left(1-\frac{8\delta}{30}\right)} = \frac{6\pi\mu u A}{1 - \frac{8\delta}{30}} = \frac{6\pi\mu u A}{1 - \frac{4\delta}{15}}$$

$$2\int_c^\infty \frac{dy}{y^2+a^2-c^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x)\sqrt{c^2+x}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\lg\frac{x-a}{x+a}$$

$c>a$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}}\lg\frac{y-\sqrt{c^2-a^2}}{y+\sqrt{}}\Bigg|_c^\infty$$

$\sqrt{c^2-a^2} = z$ $\qquad c^2-a^2=z^2$, $a^2=c^2-z^2$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}}\lg\frac{c+\sqrt{c^2-a^2}}{c-\sqrt{c^2-a^2}} = \frac{1}{z}\lg\frac{c+z}{c-z} = \frac{1}{z}\left[\lg(c+z)-\lg(c-z)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial a}$$

$$-\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x)^2\sqrt{c^2+x}} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} = \left[-\frac{1}{z^2}\lg\frac{c+z}{c-z}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{c+z}+\frac{1}{c-z}\right)\right]\frac{\cancel{-a}}{2\sqrt{c^2-a^2}}$$

$$N = \frac{1}{2}\lg\frac{c+z}{c-z} - \frac{(c^2-z^2)}{2z}\left[\frac{1}{z^2}\lg\frac{c+z}{c-z}-\frac{2c}{z(c^2-z^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lg\frac{c+z}{c-z}\underbrace{\left[1-\frac{c^2-z^2}{2z^2}\right]}_{\frac{3z^2-c^2}{2z^2}}+\frac{c}{z^2} = \frac{1}{c^2-a^2}\left\{\frac{2c^2-3a^2}{2\sqrt{c^2-a^2}}\lg\frac{c+\sqrt{}}{c-\sqrt{}}+c\right\}$$

$\frac{c}{a} = 1+\delta$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{2\delta+\delta^2}\left\{\frac{1-4\delta-2\delta^2}{2\sqrt{2\delta+\delta^2}}\lg\left(\frac{1+\delta+\sqrt{2\delta+\delta^2}}{1+\delta-\sqrt{2\delta+\delta^2}}\right)+1+\delta\right\}$$

$$\lg\frac{1-x}{1+x} = -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3} \qquad -\left(x+\frac{x^2}{2}\ldots\right)$$

$$\lg(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-$$

$$\cancel{-\delta+\sqrt{2\delta+\delta^2}-\tfrac{1}{2}(\delta^2+2\delta+\delta^2-2\delta\sqrt{2\delta+\delta^2})+}$$

$$-2\left[\frac{\sqrt{2\delta+\delta^2}}{1+\delta}+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2\delta+\delta^2}}{1+\delta}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\right)^5\right]\ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{a}}{1+\delta}\frac{1}{2\delta+\delta^2}\left\{-(1-4\delta-2\delta^2)\left[1+\frac{1}{3}\frac{2\delta+\delta^2}{(1+\delta)^2}+\frac{1}{5}\frac{(2\delta+\delta^2)^2}{(1+\delta)^4}\right]+(1+\delta)^2\right\} = \frac{6\pi\mu a A}{1-\frac{17}{120}\delta}$$

$$N = \frac{3z^2-c^2}{2z^3} \lg \frac{c+z}{c-z} + \frac{c}{z^2}$$

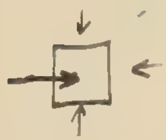
$$= \frac{1}{z}\left[\cancel{3}\ \frac{3-\left(\frac{c}{z}\right)^2}{2} \lg \frac{\frac{c}{z}+1}{\frac{c}{z}-1} + \frac{c}{z}\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left[\frac{3-\beta^2}{2} \lg \frac{\beta+1}{\beta-1} + \beta\right]$$

$$\frac{-5+9}{30}$$

$$1+\frac{\delta}{3}-\frac{\delta^2}{6}+\frac{3\cdot\cancel{4}\,\delta^2}{2\cdot\cancel{4}\cdot5} = 1+\frac{\delta}{3}+\frac{2\delta^2}{15}$$

$$1+\frac{2\delta}{3}-\delta^2+\frac{4\delta^2}{5} = 1+\frac{2\delta}{3}-\frac{\delta^2}{5}$$



$$\left(\frac{mc}{M}+C\right)^2-(C-c)^2 \quad +$$

$$z^2 = c^2-a^2$$

$$a^2c = \alpha$$

$$z^2 = c^2-\frac{\alpha}{c}$$

$$\frac{c}{z}=\beta \qquad 1 = \beta^2-\frac{\alpha}{c^3}\beta^2$$

$$\frac{1}{z}=\frac{\beta}{c} \qquad \frac{\alpha\beta^2}{c^3} = \beta^2-1$$

$$\frac{1}{c} = \sqrt[3]{\frac{\beta^2-1}{\alpha\beta^2}}$$

$$= \beta\sqrt[3]{\frac{\beta^2-1}{\alpha\beta^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(\beta^2-1)\beta}{\alpha}}$$

$$\left(1-\frac{mc}{MC}\right)\left(C+\frac{mc}{M}\right)^2$$

$$-\left(1+\frac{mc}{mC}\right)\left(C-\frac{mc}{M}\right)^2$$

$$\frac{1}{c}\,\frac{(1-\delta)}{2\delta-\delta^2}\left\{(1+2\delta-\delta^2)\left[1+\frac{2\delta-\delta^2}{2.3}+(2\delta-\delta^2)^2\frac{3}{2.4.5}\right]-(1-\delta)^3\right\}$$ 170

$$\left\{\cancel{1}+2\delta-\delta^2+\frac{\delta}{3}(1+\ldots)-\frac{\delta^2}{6}+\frac{3\delta^2}{2.5}-\cancel{1}+3\delta-3\delta^2\right\}$$

$$\delta\left(2+\frac{1}{3}+3\right)-\delta^2\left(4-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{10}+\cancel{4}\right)$$

$$\frac{16}{3} \qquad \frac{120-20+5-9}{30}=\frac{96}{30}=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$$

$$=\frac{1-\delta}{c}\,\frac{1}{2\delta-\delta^2}\left\{\frac{16}{3}\delta-\frac{16\delta^2}{5}\right\}=\frac{8}{3c}\,\frac{1-\delta}{1-\frac{\delta}{2}}\left(1-\frac{3\delta}{5}\right)$$

$$=\frac{8}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\,\frac{1-\delta}{1-\frac{\delta}{2}}\,\frac{1-\frac{3\delta}{5}}{(1-\delta)^{2/3}}=\frac{8}{3\sqrt[3]{\alpha}}\left[1-\frac{\delta}{2}-\frac{3\delta}{5}+\cancel{1}+\frac{2\delta}{3}\right]$$

$$1-\frac{15+18-20}{30}\delta$$

$$=\frac{8}{3\sqrt[3]{\alpha}}\left(1-\frac{13\delta}{30}\right)$$

$$N=\frac{1}{2}\lg\frac{c+2}{c-2}\underbrace{\left[1-\frac{c^2}{2z^2}\right]}_{\frac{2z^2-c^2}{2z^2}}+\frac{c^3}{2^2(c^2-2^2)}$$

$$=1$$

$$=\frac{1}{c^2-a^2}\left\{\frac{c^2-2a^2}{2\sqrt{c^2-a^2}}\lg\frac{c+\sqrt{}}{c-\sqrt{}}+\frac{c^3}{a^2}\right\}=\frac{1}{a(2\delta+\delta^2)}\left\{\frac{1-2\delta-\delta^2}{2\sqrt{2\delta+\delta^2}}\lg\ldots+(1+\delta)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{a(1+\delta)(2\delta+\delta^2)}\left\{-(1-2\delta-\delta^2)\left[1+\frac{1}{3}\,\frac{2\delta+\delta^2}{(1+\delta)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{(2\delta+\delta^2)^2}{(1+\delta)^4}\right]+(1+\delta)^4\right\}$$

$$\cancel{1}+4\delta+6\delta^2-\cancel{1}+2\delta+\delta^2-\frac{\overset{=2\delta+\cancel{4}-3\delta^2}{2\delta+\cancel{4}-3\delta^2}}{3}+\frac{4}{3}\delta^2-\frac{4}{5}\delta^2$$

$$\frac{16}{3}\delta+\frac{128}{15}\delta^2$$

$$3+\frac{4}{3}-\frac{4}{5}=\frac{45+20-12}{15}=\frac{53}{15}+75=\frac{128}{15}$$

$$=\frac{\cancel{1}\,\frac{8}{3}}{\sqrt[3]{\alpha}(1+\delta)^{2/3}(1+\delta)\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}\left[1+\frac{\overset{8}{\cancel{128}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}\,\frac{3}{\cancel{16}}\delta\right] \qquad \left(1-\frac{17}{30}\right)$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt[3]{\alpha}\left[1-\frac{3\delta}{2}-\frac{2\delta}{3}+\frac{8\delta}{5}\right]=\frac{8}{3}\sqrt[3]{\alpha}\left(1-\frac{45+20-48}{30}\right)=\frac{8}{3}\sqrt[3]{\alpha}\left(1-\frac{17}{30}\delta\right)$$

$$dn = \varphi\, e^{-\frac{N}{RT}\Phi}\, d\alpha = F_{(\alpha)}\, d\alpha$$

$$\Delta(\alpha) = \Delta_1 = -B\, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\, t$$

$$n_1 = F_{(\alpha_0)}\, \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\, \Delta t$$

$$n_2 = \int_{\Delta=0}^{\Delta=\infty} F(\alpha_0 - \Delta)\, d\Delta \int_{\Delta}^{\infty} \psi(\Delta)\, d\Delta$$

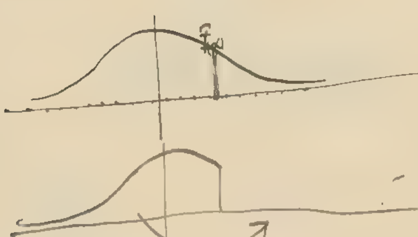
$$\int_{\Delta=0}^{\infty} F(\alpha_0 - \Delta)\, d\Delta \int_{\Delta}^{\infty} \psi(\Delta)\, d\Delta - \int_{\Delta=0}^{\infty} F(\alpha_0 + \Delta)\, d\Delta \int_{\Delta}^{\infty} \psi(\Delta)\, d\Delta - B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} t\, F(\alpha_0) = 0$$

$$\int_0^{\infty} d\Delta \quad \cancel{F(\alpha_0)} - 2\Delta\, F'(\alpha_0) + \cancel{\frac{\Delta^2}{2} F''(\alpha_0)}$$

$$+\int_0^{\infty} 2\Delta\, F'(\alpha_0)\, d\Delta \int_{\Delta}^{\infty} \psi(\Delta)\, d\Delta = -B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_0 t\, F(\alpha_0)$$

$$= \cancel{\frac{\Delta^2}{2} F'(\alpha_0) \int_{\Delta}^{\infty} \psi(\Delta)\, d\Delta}\Bigg|_{\Delta=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} F'(\alpha_0)\, \psi(\Delta)\, d\Delta =$$

$$\overline{\Delta^2} = \frac{-2 B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_0 t\, F(\alpha_0)}{F'(\alpha_0)}$$



$$-\int_{\Delta=0}^{\infty} F(\alpha_0 - \Delta)\, d\Delta \int_{\Delta}^{\infty} \psi(\Delta)\, d\Delta$$

ψ is function (Δ)
but not (α)

Durch ~~Mol~~ Wärme bewegung allein bewirkt Änderung:

$$\frac{F'(\alpha_0)}{2} \int_0^{\infty} \Delta^2 \psi(\Delta)\, d\Delta$$

$$\mathfrak{F}'_{(\alpha)} = \cancel{\psi} - \mathfrak{F}_{(\alpha)} \cdot \frac{N}{RT} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \alpha}$$

$$\bar{\Delta^2} = + \frac{2B \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} t \, \mathfrak{F}_{(\alpha)}}{\frac{N}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \mathfrak{F}_{\alpha}} = \frac{2BRT}{N} t$$

Voraussetzung 1. Dass man überhaupt die Änderung von α additiv berechnen kann als Summen [illegible]

2). [illegible]

[illegible] $K = -C\alpha$
([illegible])

$$\Delta_{(\alpha)} = -B \alpha t \; ?$$ warum nicht $\frac{t^2}{2}$, wie aus Superposition [illegible]

$$B\alpha \frac{t^2}{2} \mathfrak{F}_{(\alpha_0)} = \frac{\mathfrak{F}'_{(\alpha)}}{2} \int_0^\infty \Delta^2 \varphi(\Delta) \, d\Delta$$

$$\mathfrak{F}_{(\alpha)} = e^{-\frac{N}{RT} \frac{\alpha^2}{2} C} \qquad \mathfrak{F}'_{(\alpha)} = -\mathfrak{F}_{(\alpha)} \, \alpha C \frac{N}{RT}$$

$$\int \Delta^2 \varphi \Delta \, d\Delta = B \frac{t^2 RT}{NC} \qquad B = \frac{C}{m}$$

Vergleichung mit krit. u. unkrit. φ

$$= t^2 \frac{RT}{Nm}$$

3). ~~[illegible]~~ Vorausgesetzt ist eine Potentialkraft; Reibung hat kein Pot., ~~[illegible]~~ sondern prop. jeweiligen Geschwindigkeit

4). Wärmebewegung allein muss ausreichen
In der That wenn $\mathfrak{F}_{(\alpha)} = \text{konst.}$: Änderung $= 0$

Apparent increase of mass produced by viscosity (ball oscillating in visc. fl. Lamb, § [illegible])

$$M + \frac{4}{3}\pi\rho a^3\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4a\beta}\right) \qquad \beta = \sqrt{\frac{\alpha\rho}{2\mu}} = \sqrt{\frac{\pi\rho}{\mu T}}$$

$\sin \alpha t$

$\alpha = \frac{2\pi}{T}$

$\left(\frac{c}{C}\right)^3 = \frac{6\pi\mu a}{M}\, dt$

$\tau \cdot \frac{6\pi\mu a}{M} = \ldots = \frac{0{\cdot}4}{10}\,\frac{1}{n}\,\frac{M}{m}$

Time of apparently free motion of big molecule:

$$\tau = \frac{l}{C\delta} = \frac{lM}{Cm}\cdot\frac{32}{9} = \frac{32}{9}\,\frac{c}{n}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{M}{m}\,\frac{1}{C} = \frac{32}{9}\,\frac{1}{n}\,\frac{M}{m}$$

$$= \sim \frac{4}{2{\cdot}5}\,\frac{10^7}{10^{17}} = 10^{-10}$$

$\pi \cdot 4 \cdot 10^{19} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-8} = 25 \cdot 10^{\,25{\cdot}8} \quad n^{?} = 10^{17 \cdot 5}$

$\mu = 0{\cdot}0002 \qquad a = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$ cm.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt{\frac{\pi \cdot 0{\cdot}0013}{0{\cdot}0002\cdot 10^{-10}}}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2\cdot 10^{-4}\sqrt{2\cdot 10^{11}}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10^{-4}\sqrt{10^{10}}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right)\rho$$

insensible

Other way of comparison:

Velocity of spreading out of laminar motion: $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

distance reached in time τ: $10^{-10}\cdot\sqrt{\frac{0{\cdot}0002}{0{\cdot}0013}} = 3\cdot 10^{-10}$ insensible in comparison with radius of molec.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\overbrace{6\pi\mu a}^{\beta}}{\frac{4}{3}\pi a^3\rho'}\, v \qquad \beta = \frac{9}{2}\,\frac{\mu}{a^2\rho'} = \frac{9}{2}\,\frac{0{\cdot}0002}{\frac{1}{4}\cdot 10^{-8}} = 2\cdot 10^5$$

Diminishment of initial velocity in a single ...: $\frac{dv}{v} = \beta\tau = \ldots 1!$

$$v = v_0 e^{-\beta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$x_\infty = \frac{0{\cdot}4}{2\cdot 10^5} = 10^{-5}\ \text{cm}$$

$$x = v_0\,\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}$$

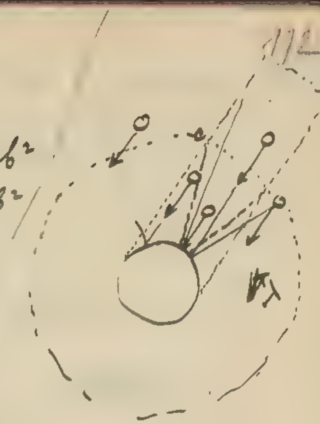
apparent λ in every case $\sim x_\infty$ (forges [illegible])

$$x_\infty = \frac{v_0}{\beta}$$

$$(x-b\cos\alpha t)^2+(y+b\sin\alpha t)^2+z^2=a^2$$

$$x^2+y^2+z^2-2bx\cos\alpha t+2by\sin\alpha t=a^2-b^2$$

$$r^2 \quad -2br\cos(\varphi+\alpha t) \qquad = a^2-b^2$$

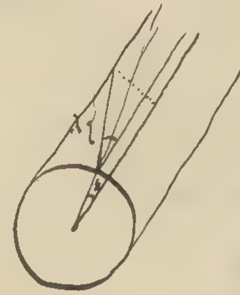


10^{-13} $\quad \frac{1}{2}+\frac{9}{2.10^{-4}\sqrt{\frac{\pi}{5.92.10^{-6}}}} = \frac{1}{2}+\frac{9}{2.\;\sqrt{\frac{\pi}{2}10^{7}}}$

for torque

What is the limit of applicability of resistance formula?

For smooth regularly reflecting sphere



$$\frac{a(1-\sin\varepsilon)}{\lambda}=\sin 2\varepsilon$$

$$\frac{a}{\lambda}(1-\sin\varepsilon)=2\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

For small values ε: $\sin\varepsilon = \frac{a}{2\lambda}$

Reflected mol. are of importance if

$a^2\pi \, \sin^2\varepsilon$ of order $a^2\pi$

$\therefore$ if a of order λ

This same result otherwise: ~~.....~~ probability of one molecule striking twice on sphere $\sim \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$

This is no definite argument yet: The influence of motion ... on direction of the next path may be small, but the aggregate influence of the preceding paths may force the molec. to keep its direction.

Problem: Molec. has steady motion C from infinity, what force necessary to change its dir. by angle $\frac{\pi}{2}$ (what increase of apparent mass?)

or to lead it away on circular orbit of radius l?

Analogy in straight motion: Particle moving from ∞ with steady velocity; what apparent mass for change of velocity?

with conduction of medium:

$$\tau = \frac{32}{9}\frac{1}{n}\frac{M}{m}\left(1+\frac{9}{4}\rho\frac{1}{a}\sqrt{\frac{T\mu}{\pi\rho}}\right) = \frac{32}{9}\frac{1}{n}\frac{M}{m}\left(1+\frac{9}{4}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{T\mu\rho}{\pi}}\right)$$

taking $\tau = T$

$$\tau = a(1+b\sqrt{\tau}) \qquad (\sqrt{\tau})^2 - ab\sqrt{\tau} = a$$

$\cancel{a + ab\sqrt{\tau}}$

$$\sqrt{\tau} = \frac{ab}{2} \pm \sqrt{a + \frac{(ab)^2}{4}}$$

$$= \frac{ab}{2} + \sqrt{a}\left[1 + \frac{ab^2}{8}\right]$$

$$\tau = a + \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^3b^4}{64}$$

$$\left.\begin{aligned} n &\overset{\text{gas}}{=} a^2\pi cN \\ m &= \frac{\rho_g}{N} \\ M &= \frac{4a^3\pi}{3}\rho_c \end{aligned}\right\} \qquad \frac{M}{m n} = \frac{4}{3}\frac{a^3\pi}{a^2\pi c\,\rho_g} = \frac{4}{3}\frac{a}{c\rho_g} \neq \frac{4}{3}\frac{10^{-4}}{4.10^4.10^{-3}} = \frac{1}{6}10^{-5}$$

$$a = \frac{16}{27}10^{-5}$$

$$b = \frac{9}{4a}\sqrt{\frac{\mu\rho}{\pi}} = \frac{9}{2.10^{-4}}\sqrt{\frac{10^{-3}.2.10^{-4}}{3}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{20}{3}} \neq 30$$

$$\tau = a\left[1+\frac{ab^2}{2}+\frac{(ab)^2}{64}\right) = \cancel{a\left[1+\frac{16}{27}\frac{900}{2}.10^{-5}\right] = a\left[1+\frac{1}{3}10^{-2}\right]}$$

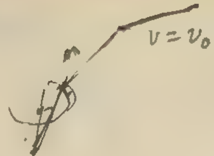
$$+\tfrac{1}{2}b\sqrt{a}\ \Big] \qquad = a\left[1+\frac{30}{2}\sqrt{6}.10^{-3}\right] = a\left[1+4.10^{-2}\right]$$

$$= a\left[1+4\%\right]$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{\cdots}}$$

$$= \int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2}{\sqrt{}} = a^2\arcsin\frac{x}{a} - -$$

$v = v_0(1 - e^{-\beta t})$



$v = v_0\left(1 - \frac{1}{t}\right)$

Kruh $v = \text{const}$: $R = a\sqrt{t}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2$$

$$\frac{a^2}{4t} + a^2 t\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - \frac{a^2}{4t}}{a^2 t}}$$

$$\frac{a^2}{4t}\left[4t\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1\right] = c^2$$

$$a^2 t\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1 = \frac{4tc^2}{a^2}$$

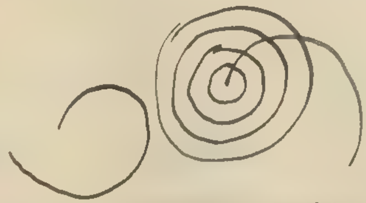
$$d\varphi = dt\sqrt{\frac{c^2}{a^2 t} - \frac{1}{4t^2}}$$

$$= dr\,\frac{2}{a}\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{4t}} = \frac{2\,dr}{a}\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{r^2}}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{\frac{4tc^2}{a^2} - 1}{a^2 t}}$$

$$= \sqrt{\frac{4c^2}{a^4} - \frac{1}{a^2 t}}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{4c^2}{a^4} - \frac{1}{a^2 r^2}}$$



Jak daleko rozumný jsi v ose τ než lamellový kruh?

Na víc drahý jinak to ovlivní?

$$\frac{1}{r} = x \qquad dr = -\frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{dr}{r^2} = dx$$

$$d\varphi = \frac{dr}{a}\sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - \frac{1}{r^2}}$$

$$= -\frac{dx}{a x^2}\sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - x^2} = \cancel{-\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\frac{4c^2}{a^2}x^2}} \quad \cancel{\frac{x}{\sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - x^2}} = u} \quad x = u\sqrt{\frac{\frac{4c^2}{a^2}}{1+u^2}}$$

$$a\varphi = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - x^2} + \int\sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - x^2}\,dx = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - x^2} + \frac{4c^2}{2a^2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\cdots}} - \frac{x}{2}\sqrt{\frac{4c^2}{a^2} - x^2}$$

$$\Delta_2 = \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{3\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\mu R}} = \cancel{\ell}\cdot \ell\sqrt{\frac{C}{\alpha \ell}} = \sqrt{\frac{C\ell}{\alpha}} = \sqrt{\frac{C\,c}{\alpha n}\sqrt{\frac{m}{M}}}$$

$$\frac{1}{3\pi}\,\frac{c\,n}{\mu R} = \frac{C}{\alpha n}\sqrt{\frac{m}{M}} \qquad \frac{c}{C} = \sqrt{\frac{M}{m}}$$

$$\frac{1}{3\pi}\,\frac{m}{\mu R} = \frac{m}{M}\,\frac{1}{\alpha n}$$

$$\alpha = \frac{\mu R}{M n}\cdot 3\pi$$

$$\mu = \frac{N m c \lambda}{3}$$

$$= \frac{\mu}{M R N c} = \cancel{\frac{\pi}{R}}\,\frac{N m c \lambda}{3 M R N c} = \frac{m}{M}\,\frac{\lambda}{3R}$$

$$\frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{3\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\mu R}} = \ell\sqrt{\frac{2n}{\delta'}} = \frac{c}{n}\sqrt{\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{2n}{\delta'}} = \sqrt{\frac{2m}{n M \delta'}}$$

$$\frac{1}{3\pi\mu R} = \frac{2}{n M \delta'}$$

$$\delta_2' = \frac{6\pi\mu R}{n M} = \frac{6\pi \frac{N m c \lambda}{3} R}{R^2 \pi N c M} = \underline{\underline{2\,\frac{m}{M}\,\frac{\lambda}{R}}}$$

zanadt $\underline{\underline{\frac{\delta}{\delta_m} = \frac{2}{3}\ldots}}$

$$\frac{\lambda}{R} = \frac{\frac{\lambda}{c}}{\frac{R}{C}}\,\frac{c}{C} = \frac{\tau_m}{\tau_M}\cdot\sqrt{\frac{M}{m}}$$

$$t = \frac{R}{c} \qquad R\frac{C}{c}$$

$$n\frac{R}{c} =$$

$$\cancel{t = \frac{R}{c}} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{R^2 \pi\,\mu}{M}$$

$$C t\sqrt{\frac{1}{t}} = C\sqrt{t} \longrightarrow C\sqrt{\frac{M}{\mu R}} = c\sqrt{\frac{m}{\mu R}}$$

$$= C\sqrt{\frac{\mu}{M}}\,R$$

$t = \sqrt{\frac{M}{\mu R}} = \sqrt{\frac{R^2 \rho'}{\mu}}$

Beginning rule: if mass M is moving with uniform velocity C it is surrounded by layer of liquid, of thickness of order R, with the same velocity

Now sphere M let free to itself: ~~as long as the surrounding liquid has the same velocity~~, ~~it~~ they then will be driven on in the same direction (with diminishing velocity)

Modulus of decay (with β) velocity ~~of liquid~~ $\beta = \dfrac{6\pi\mu R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho'}$

time of relaxation: $t = \dfrac{M}{R\mu}$

E. gets his „way" by adding together those free lengths of path which result from such motions of such duration by haphazard aggregation.

This calculation is quite right in respect to decay of initial motion in given direction. Besides there will be ~~tangential~~ impulses perpendicular to this direction and therefore resulting perpendicular motions. Resultant velocity remains unaltered, during the whole motion. Thus we get the way of a „mean" sphere M

probability of motion in initial direction

$$v = v_0 e^{-\beta t} \qquad x = \int v\,dt = \frac{v_0 (1 - e^{-\beta t})}{\beta}$$

$$v_\perp = \sqrt{V_0^2 - v^2} = v_0 \sqrt{1 - e^{-2\beta t}}$$

Taking the mean way as $Ct = \dfrac{C}{\beta}$ we underrate the mobility because

1). we neglect the remaining persistency

2). we " the perpendicular elongation at the end of the first way

Using the same method in the former case:

Resistance if $\frac{\lambda}{R}$ big: $\frac{2\pi}{3} R^2 \rho c v = -M \frac{dv}{dt}$

$$\beta = \frac{\frac{2\pi}{3} R^2 \rho c}{M}$$

$$\frac{C}{\sqrt{\beta}} = \frac{C}{R}\sqrt{\frac{M}{\rho c}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

$$= \frac{c\sqrt{m}}{R\sqrt{\rho c}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\frac{\sqrt{mc}}{R\sqrt{\rho}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sqrt{\frac{c}{N}}\cdot\frac{1}{R}$$

Whilst Δ_{Sm} original: $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{c}{N}}$!!

$$\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}}$$

$$v_0\int_0^{\beta t=1}\sqrt{1-e^{-2\beta t}}\,dt = \cancel{v_0\int\sqrt{1-\ldots}}\ \frac{v_0}{\beta}\int_0^1\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$$

$\cancel{\ldots}$ $e^{-x} = \sin\varphi$

$-x = \log\sin\varphi$

$dx = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi$

$$= -\frac{v_0}{\beta}\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = -\frac{v_0}{\beta}\int\left(\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \sin\varphi\,d\varphi\right)$$

$$\cancel{= \frac{v_0}{\beta}\int\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\sin\varphi = \frac{v_0}{\beta}\int\frac{(1-\sin^2\varphi)}{\sin\varphi}\,d\sin\varphi}$$

$$\cancel{= \frac{v_0}{\beta}\left(\log\sin\varphi - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right) = \frac{v_0}{\beta}\log e^{-x} - e^{-2x}}\qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= -\frac{v_0}{\beta}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right) = -\frac{v_0}{\beta}\left\{\log\left(\frac{e^{-x}}{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}\right) + \sqrt{1-e^{-2x}}\right\}$$

$$= +\frac{v_0}{\beta}\left\{+x + \log\left(1+\sqrt{1-e^{-2x}}\right) - \sqrt{1-e^{-2x}}\right\}\Big|_0^1 = +\frac{v_0}{\beta}\left\{1 - \sqrt{1-e^{-2}} + \log\left(1+\sqrt{1-e^{-2}}\right)\right.$$

$$1+\frac{\frac{e^{-2x}}{\sqrt{}}}{1+\sqrt{}}-\frac{e^{-2x}}{\sqrt{}}=\frac{e^{-2x}}{\sqrt{}}\underbrace{\left(-1+\frac{1}{1+\sqrt{}}\right)}+1$$

$$=\frac{\sqrt{}}{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}+1=\cancel{\frac{2e^{-2x}}{1+\sqrt{}}\left(+1+\sqrt{}\right)}$$

$$=\frac{-e^{-2x}}{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}+1=\frac{-e^{-2x}\left(1-\sqrt{}\right)+e^{-2x}}{\cancel{1-}(1+e^{-2x})}\quad\cancel{=\frac{\sqrt{}-(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})}+1=}$$

~~stimmt~~

$$\cancel{=\frac{-v_0}{\beta}\left[1+\sqrt{}-\frac{1-x^2}{2}\right.}$$

$$\neq\frac{v_0}{\beta}\left[1-\left(1-\frac{1}{2e^2}\right)+\log 2\right]\neq\log 2\cdot\frac{v_0}{\beta}$$

Not so much in reality because path is not in plane (perpend) but curved in space.

$\frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{3\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{\mu R}}$ $\qquad\sqrt{\frac{\theta}{\mu}}$

$\frac{293}{0.010}$ ·98 $\quad$ $\frac{344}{0.004}$ ..399

20^0 $\quad$ 71^0

$\sqrt{293}$ $\quad$ $\sqrt{86}$

4669
9345
5324
2662

$\frac{51}{32}=$ 7076 / 5051 / 2025 $\quad$ ex $\boxed{1.59}$ $\quad$ th $\boxed{1.85}$

$m=\frac{0.0013}{4.10^{19}}$

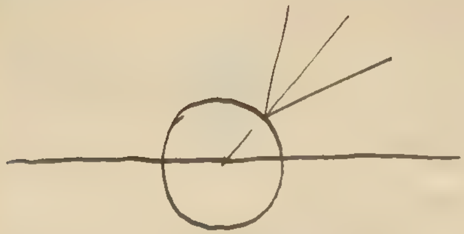
$$480.10^2.\sqrt{\frac{2\ .0.0013.10^{-19}}{10.\ 0.0098\ .10^{-4}.4}}$$

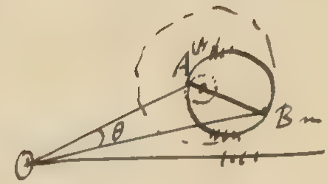
$$\cancel{=4.8.10^4\sqrt{\frac{2}{10^5}}=\sqrt{2.9.10}}$$

$$=4.8.10^4\sqrt{\frac{6.5.10^{-23}}{10^5}}=4.8.\sqrt{6.5}.10^{-5}$$

2.5

$=1.2.10^{-4}$





$$\frac{\int_{C'}^{\bar O_a} \cos AOa \,.\, g \sin\vartheta\, d\vartheta}{\int g \sin\vartheta\, d\vartheta}$$

$$\frac{\int_0^{\pi-\varphi_0} 2\pi \sin\varphi\, d\varphi \; r(\cos\varphi + \cos\varphi_0) - \int_0^{\varphi_0} 2\pi \sin\varphi\, d\varphi \; r(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{4\pi}$$

$$= \frac{r}{2}\left[\left\{\frac{\sin^2\varphi}{2} - \cos\varphi_0 \cos\varphi\right\}\Big|_0^{\pi-\varphi_0} - \left\{\frac{\sin^2\varphi}{2} + \cos\varphi_0 \cos\varphi\right\}\Big|_0^{\varphi_0}\right]$$

$$= \frac{r}{2}\left[\cancel{\frac{\sin^2\varphi_0}{2}} + \cancel{\cos^2\varphi_0} - \cos\varphi_0 - \cancel{\frac{\sin^2\varphi_0}{2}} - \cancel{\cos^2\varphi_0} - \cos\varphi_0\right] = r\cos\varphi_0$$

$$\frac{m}{M+m}\int g^2 \cos(Cg) \sin\vartheta\, d\vartheta \qquad \cos Cg = \frac{c^2 - C^2 - g^2}{2Cg}$$

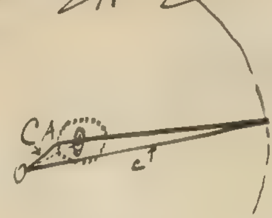
$$g\cos(Cg) = c - C \qquad g\, dg = cC \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$\cancel{\frac{m}{M+m}\frac{(c-C)}{cC}\int_{c-C}^{c+C} g^2\, dg} \qquad \frac{m}{M+m}(c-C)\frac{\int g \sin\vartheta\, d\vartheta}{\int g\sin\vartheta\, d\vartheta} = \frac{m(c-C)}{M+m} \neq \frac{mc}{m+M} \neq \frac{mc}{M}$$

[illegible]: $R^2 \pi c N$

(Boltzm. p 65)

~~$d\vartheta = -\frac{mc}{M} R^2 \pi c N$~~



$$\frac{m}{M+m} g^2 \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot \cos\theta\, g\theta$$

$$g \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot (OG - OA)$$

$$OG^2 = C^2 + g^2 \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 + \frac{m}{m+M}(c^2 - C^2 - g^2)$$

$$= C^2\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) + \frac{m}{m+M} c^2 + g^2\left[\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 - \frac{m}{m+M}\right]$$

$$= C^2 \frac{M}{m+M} + \frac{m c^2}{m+M} + g^2$$

$$\cancel{= C^2 + \frac{m}{M} c - \frac{m}{M} g}$$

$$g = c - C\cos\vartheta \qquad OG - OA = \frac{m}{M} g \cos\theta$$

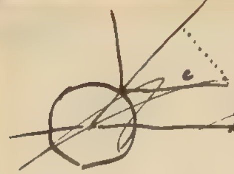
$$\frac{\frac{m}{M}\int g^2 \cos\theta \sin\theta\, d\theta}{\int g \sin\theta\, d\theta} = \frac{m}{M}\int_0^\pi \frac{c^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta - 2cC\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta + C^2\cos^3\theta\sin\theta\, d\theta}{c\sin\theta\, d\theta - C\sin\theta\cos\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{m}{M}\; \frac{c^2\frac{\sin^2\theta}{2} + 2cC\frac{\cos^3\theta}{3} - C^2\frac{\cos^4\theta}{4}}{-c\cos\theta + C\frac{\cos^2\theta}{2}}\Bigg| = \frac{m}{M}\; \frac{-\frac{2cC}{3}2}{2c} = \frac{2}{3} C\frac{m}{M}$$

ϑ ... $\frac{2}{3} C \frac{m}{M}$

$$d\vartheta = -\frac{2}{3}\frac{m}{M} V c\; R^2 \pi N \qquad \tau = \frac{3}{2}\frac{M}{m}\frac{1}{R^2\pi N c}$$

$$P = \frac{2}{3}\rho c R^2 \pi$$



$$\cancel{2R^2(c+u)^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{m}{M}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}{}} = \frac{2m\pi}{M}\frac{2}{3}(cm)^2$$

$$\Lambda = c\sqrt{\frac{8}{3\pi}\frac{n}{\cancel{p}}} = c\sqrt{\frac{8}{\pi.2n}} = c\sqrt{\frac{4}{\pi n}} = \frac{2c}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}$$

$$\cancel{\frac{P}{M}\frac{8\pi}{9}} \qquad \tau = \frac{8\pi}{9}\frac{M}{P}$$

$$c\sqrt{\frac{3.8\pi}{9.2}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

$$\cancel{c}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\alpha}\,\frac{3}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cancel{\frac{c}{\sqrt{\pi}}}$$

$$\alpha = \frac{32}{9}\cdot\frac{3\pi}{8\cdot 4} = \frac{8\pi}{9}c$$

$$\frac{\int v^3 e^{-\frac{v^2}{\alpha}}\,dv}{\int v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha}}\,dv} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} = c\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}} = c\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{10^{-4}}{10^{5}} = 5$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}}\cdot$$

$$c\sqrt{\frac{3}{2\pi}\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{\alpha} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$c\sqrt{\frac{m}{\mu R}} = c\sqrt{\frac{3m}{R.\,\lambda c\,N m}} = k\sqrt{\frac{3c}{\lambda R N}}$$

$$\frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad 485\sqrt{\frac{0.001293\,.\,2.10^{12}}{4.10^{18}\,.\,0.000171}}$$

$$\cancel{4.485}\ \overset{19.4}{} \ \frac{}{9}\sqrt{\frac{1.293}{1.71\,.\,\pi}}\,.\,10^{-3}$$

$$\frac{10^{-4}}{2.10^{-5}} = \frac{1}{20}$$

1116	2330
7301	4971
3815	7301

69075
2878
9786
−9542
0244

106

$$\frac{2}{9}\,\frac{1}{4}\cdot\frac{10^{-8}\cdot10^{3}}{1{\cdot}7\cdot10^{-4}} = = \frac{1}{18}\,\frac{\cancel{\ }\,0{\cdot}1}{1{\cdot}7} = \frac{1}{17.18} = \frac{1}{300}$$

$$\sqrt{3}\cdot\frac{\cancel{\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}}\,\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{\frac{c}{N}}}{\cancel{\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3\pi}}}\,\sqrt{\lambda c N}} = \sqrt{\frac{3}{R}}\,\frac{\lambda_0 N_0}{N_1}$$

$$\sqrt{\frac{10^{-5}\cdot 760\cdot 3.2}{10^{-4}}} = \sqrt{456} = 20$$

$$\frac{4\pi}{3}R^{2}\rho c\, u = \frac{4}{3}\overset{2}{R^{3}\pi}\,\rho' g$$

$$u = \frac{2R\rho' g}{\rho c} = \frac{10^{-4}\cdot10^{3}}{48\cdot10^{4}}\,\frac{760}{0{\cdot}001293}$$

$$\frac{7{\cdot}6}{6{\cdot}3} = 1{\cdot}2$$

$$\frac{\Delta}{u} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{R^{2}}\sqrt{\frac{c}{N}}\,\frac{\rho c}{\rho' g} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{R^{2}\rho' g}$$

$$\rho\sqrt{\frac{c^{3}}{N}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,n\sigma^{2}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}\cdot n r^{2}} =$$

$$R = 10^{-5}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3\pi}}\sqrt{\frac{c\,4\pi\sqrt{2}\,n r^{2}}{R\pi}}\,.$$

48500

$$\frac{2\cdot10^{-5}\cdot10^{3}}{10^{-3}\cdot5\cdot10^{4}} = \frac{0{\cdot}02}{50} =$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{\pi}}\,\frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{\mu R}} = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{\pi}}$$

$$\sqrt{\frac{0{\cdot}000171}{0{\cdot}0100}} = \frac{1}{\sqrt{58}} =$$

$$= \sqrt{1{\cdot}7}\cdot10^{-1} = 1{\cdot}3\cdot10^{-1}$$

$$= 0{\cdot}13$$

$$\frac{3}{4}\qquad \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} =$$

3010
5570
2440

0'555

.6021
1139

$$0{\cdot}8751 - 1 = \alpha\,(0{\cdot}5882 - 1)$$

$$\alpha = \frac{1249}{4118}$$

$$\lambda = \frac{480.00 \cdot \sqrt{\frac{0.00129}{4 \cdot 10^{19}} \frac{\frac{\cancel{4}}{3} R\vartheta}{36\pi}}}{0.01} = \frac{4.8}{6} \cdot 10^{6} \sqrt{\frac{1.29}{10^{22}} \frac{10^{-4}}{6.\pi}}$$

$$= 0.8 \; 10^{-7} \sqrt{\frac{1.29}{6.\pi}} = \frac{0.8}{3} \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{1.2}{2}}$$

$$C = \frac{\cancel{4 \cdot 10^{-8}} \, 6 \cdot 6p \cdot 10^{-2} \cdot \cancel{10^{-4}}}{\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \cancel{10^{-12}}} = 0.36 \qquad = \frac{8}{3} \cdot \frac{10^{-8}}{1.3} = 2.10^{-8}$$

$$\frac{C}{6} = 0.06$$

$$\frac{g\pi}{R\vartheta} = \frac{p\pi}{} \qquad c^2 = \frac{3R\vartheta}{\rho_0}$$

$$\frac{n\, m c^2}{3} =$$

$$1.7 \cdot 10^{17} \; 10^{-15} \; 0.0067 = \frac{1.7}{2} \; 0.67 = 1 \qquad \frac{p}{\frac{2}{3} m c} = \frac{10^{6} \cdot 4 \cdot 10^{19}}{13 \cdot 4\pi}$$

$$N \pi R^2 c = \frac{\pi}{4} 10^{-8} \cdot 485 \cdot 10^{4} \cdot 4 \cdot 10^{19} = 1.2 \cdot 10^{16} \qquad = \frac{10^{25}}{15}$$

$$= 7 \cdot 10^{23} \cdot \frac{10^{-8}}{4}\pi$$

$$= 2 \cdot 10^{16}$$

$$\frac{0.004}{2 \cdot 4 \cdot 10^{19}} \; \frac{\pi}{4\pi} \cdot 10^{-12} \qquad 10^{28} \cdot 10^{-8}$$

$$2 \cdot \frac{10^{-3}}{\pi \cdot 10^{7}} = \frac{2}{\pi} 10^{-10} \qquad 5 \cdot 10^{-6}$$

$$1 + \frac{2n}{\delta} - n - 2 \frac{\cancel{1} - 2\delta \ldots - [\cancel{1} + (n+2)\delta + \frac{n^2}{2}\delta^2 \ldots]}{\delta^2} \qquad \lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\; 4r^2 N}$$

Winkelm. metody? Knudsen p 535

$$D = \frac{\frac{mc^2}{3}}{\frac{2}{3} m n} = \frac{c^2}{cn} = \frac{c^2}{2 R^2 \pi c N} = \frac{c}{N \cdot 2 r^2 \pi} = c \lambda \; 2\sqrt{2}$$

4771
4971
9742
-9031
0711
03550
1085

$\Lambda = \sqrt{\frac{2n}{\delta}}$

$M\frac{dC}{dt} = -6\pi\mu R C$

$\delta = \frac{\varepsilon^2}{2}$

$M(C^2 + c^2) = \text{const}$

$-\cancel{M}\frac{dC}{dt}\cdot C = \cancel{M}\frac{dc}{dt}c = \frac{6\pi\mu R}{M} C^2$

$\frac{1}{2}\frac{d(c^2)}{dt} =$

$l\varepsilon = \frac{l^2}{R}$

$\varepsilon = \frac{l}{R}$

$\cancel{M(C - dC)^2 + c^2 =}$

$\cancel{\left(\frac{dc}{dt}\right)^2 = 2C\frac{dC}{dt}} =$

$\cancel{C^2 = \left(C - \frac{dC}{dt}dt\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}dt\right)^2}$

$\left(\frac{dc}{dt}dt\right)^2 = 2C\frac{dC}{dt}dt =$

$\Lambda = \sqrt{\frac{2Ct}{\delta}}$ only for time t large in comp. with f...

$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2C}{t\delta}}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eH\frac{dy}{dt} + eE_x + \frac{\partial U}{\partial x} \qquad H = H(1+\alpha t)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -eH\frac{dx}{dt} + eE_y + \frac{\partial U}{\partial y} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\cancel{m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) = 0} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial z}}$$

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}\right) = e\left(\cancel{E_x\frac{dx}{dt}} + E_y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\Bigg|_0 = e\left(\cancel{xE_x} + yE_y\right)\Bigg|_0 - e\int\left(\cancel{x\frac{\partial E_x}{\partial t}} + y\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)dt$$

$$= -e\int\left(y\frac{\partial H}{\partial x} - \cancel{x\frac{\partial H}{\partial y}}\right)dt$$

Plane wave $\quad \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial x} \neq 0 \qquad E_x = 0$

$H_y = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$

$H_x = 0 \qquad E_z = 0$

$$\int y\frac{\partial H}{\partial x}dt = \int y\frac{\partial E_y}{\partial t}dt$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = +\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

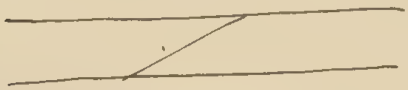
$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = e H \frac{d y_1}{dt}$$

Przepływ gazu bardzo rozrzedzonego przez rurkę [illegible]

rozmiary rurki (poprzeczne) małe w porówn. z λ



Liczba uderzeń o ścianę po sek. $\mp \frac{nc}{3}$ pochodzące

Przeciętnie drobina lecąca w jakimś kierunku od jednej do drugiej ściany musi tyle

zyskać prędkości $\mp u$ w skutek przedpr. zderzenia z innymi jak traci w skutek uderzenia

o ścianę

Ponieważ pod uwagę tylko $\frac{1}{3}$ wszystkich, poruszających się $\perp$

pęd uderz. o ścianę $\qquad m \cdot \frac{nc}{3} \cdot u$

po uderz. o ścianę $\qquad m \frac{nc}{3} u \beta + (1-\beta) m \frac{nc}{3} \cdot 0$

to porusza się $\frac{\lambda}{2\pi}$ razy aż się zderzy z innymi i wyrówna do normy

$$\frac{\lambda}{2\pi} m \frac{nc}{3} u (1-\beta) = \frac{nc}{3} m \frac{u}{2}$$

Przy każdym uderzeniu ułamek f zostaje „skoordynowany", więc z liczby N wpadających z prędkością U

po k krotnem odbiciu tylko ułamek $N(1-f)^k$ będzie posiadał prędkość U, reszta prędkość

prędkość 0

Więc jeżeli z prawej strony wpada po sek.: $r^2\pi \frac{c}{3} n$

to z tego tylko wyjdzie $r^2\pi \frac{cn}{3} (1-f)^k$ reszta równomiernie na obie strony

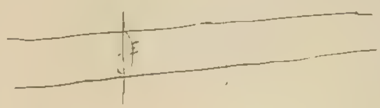
$$\frac{r^2\pi}{3} c(n_1-n_2)(1-f)^k + \cancel{\frac{r^2\pi c}{3}\left[(1-f)^k\right]} \quad ?$$

z danego elementu długości rurki wycinamy dowolny.

jaka jest prawdopodobieństwo otrzymania odstępu $x + dx$ po upływie czasu t

przejdzie zupełnie wszystkie zderzenia

albo jaka będzie tych które w czasie $t \ldots t + dt$ będą przechodziły przez przekrój x ?



$$\mathcal{D} = \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - (1-\rho^2)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right]$$

$$\mathcal{D}.\rho^n = \frac{-(1-\rho^2)\;n(n-1)\,\rho^{n-2}}{h^2(\rho^2-\mu^2)}$$

$$\mathcal{D}.\mu\rho^n = -\frac{(1-\rho^2)\,\mu\;n(n-1)\,\rho^{n-2}}{h^2(\rho^2-\mu^2)}$$

$$\frac{1}{\rho^2-\mu^2}$$

$$-\frac{2\rho}{(\rho^2-\mu^2)^2} \qquad +\frac{2\mu}{(\rho^2-\mu^2)^2}$$

$$-\frac{2}{(\rho^2-\mu^2)^2}+\frac{8\rho^2}{(\rho^2-\mu^2)^3} \qquad \frac{+2}{(\rho^2-\mu^2)^2}+\frac{8\mu^2}{(\rho^2-\mu^2)^3}$$

$$\mathcal{D}\,\mu\rho^3 = -\frac{(1-\rho^2)\,\mu\,\rho}{\rho^2-\mu^2}$$

$$= -\frac{(1-\rho^2)\,\mu\,\rho^3}{(\rho^2-\mu^2)^2} + \frac{(1-\rho^2)\,\mu^3\rho}{(\rho^2-\mu^2)^2}$$

$$\mathcal{D}(\mu^2\rho^2) = \frac{2}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left[(1-\mu^2)\,\rho^2-(1-\rho^2)\,\mu^2\right]$$

$$= \frac{2}{h^2}$$

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{\rho^2-\mu^2}\right) = \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left[\cancel{(1-\mu^2)}\frac{2}{(\rho^2-\mu^2)^2}\left[(1-\mu^2)+(1-\rho^2)\right] \underbrace{+\frac{8}{(\rho^2-\mu^2)^3}\left[\mu^2(1-\mu^2)-\rho^2(1-\rho^2)\right]}\right]$$

$$= -\frac{1}{(\rho^2-\mu^2)^2}+\frac{\rho^2+\mu^2}{(\rho^2-\mu^2)^2}$$

$$= \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left\{\frac{4}{(\rho^2-\mu^2)^2}-\frac{2(\mu^2+\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}-\frac{8}{(\rho^2-\mu^2)^2}+\frac{8(\mu^2+\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)^3}\left\{6(\mu^2+\rho^2)-4\right\}$$

$$\mathfrak{D}D\psi = \frac{\rho}{\mu}\,\frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial D}{\partial\omega} + \frac{2}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x}D\right]$$

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}$$

$$D = \frac{1}{k^2(\rho^2-\mu^2)}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - (1-\rho^2)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right]$$

$$\psi = \rho^3$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = -\frac{3\omega\rho^3}{k^2(\rho^2-\rho^2)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{3\mu\rho^2(1-\rho^2)}{k(\rho^2-\mu^2)}$$

$$D = -\frac{6(1-\rho^2)\rho}{k^2(\rho^2-\mu^2)}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} = -\frac{6}{k^3}\left\{\cancel{\frac{1-\rho^2}{\rho^2-\mu^2}}\left[\frac{1-3\rho^2}{\rho^2-\mu^2} - \frac{2\rho^2(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\right]\frac{\mu(1-\rho^2)}{\mu^2-\rho^2} + \frac{2\mu\rho(1-\rho^2)\rho(1-\mu^2)}{(\rho^2-\mu^2)^3}\right\}$$

$$= -\frac{6}{k^3}\,\frac{\mu(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\left[3\rho^2-1+\frac{2\rho^2(1-\rho^2)}{\rho^2-\mu^2} + \frac{2\rho^2(1-\mu^2)}{\rho^2-\mu^2}\right]$$

$$\cancel{3\rho^4}-\cancel{\rho^2}-3\mu^2\rho^2+\cancel{\mu^2}+\cancel{2\rho^2}-\cancel{2\rho^4}+\cancel{2\rho^2}-2\mu^2\rho^2$$

$$= -\frac{6}{k^3}\frac{\mu(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\left[\frac{\rho^4+3\rho^2+\mu^2-5\mu^2\rho^2}{\rho^2-\mu^2}\right]$$

$$\frac{\partial D}{\partial\omega} = -\frac{6}{k^4}\left[\frac{\rho^2-\mu^2-3\rho^4+3\mu^2\rho^2-2\rho^2+2\rho^4}{(\rho^2-\mu^2)^2}\frac{\rho\omega}{\rho^2-\mu^2} + \frac{2\mu\rho^2(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\frac{\mu\omega}{\mu^2-\rho^2}\right]$$

$$= -\frac{6}{k^4}\frac{\omega}{(\rho^2-\mu^2)^3}\left[-\rho^5-\rho^3-\mu^2\rho+3\mu^2\rho^3-2\mu^2\rho+2\mu^2\rho^3\right]$$

$$= \left[-\rho^5-\rho^3-3\mu^2\rho+5\mu^2\rho^3\right]$$

$$(1-\mu^2)\frac{\delta^2 f}{\partial\mu^2}-(1-\rho^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} = \frac{3\mu\rho^3(1-\rho^2)}{k(\rho^2-\mu^2)}\left\{\frac{2(\rho^4-\rho^2-\mu^2)}{\rho^2-\mu^2}+\frac{1}{1-\mu^2}\right\}$$

$$= \frac{3\mu\rho^3(1-\rho^2)}{k(\rho^2-\mu^2)}\left\{\frac{2\rho^4}{\rho^2-\mu^2}+\frac{1}{1-\mu^2}-2\right\}$$

$$D\left\{\frac{\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^2}\lg\frac{1+\mu}{1-\mu}\right\} = \,?$$

$$DD_\psi = \frac{\rho}{\mu}\,\frac{1}{\omega}\left\{\frac{3\omega\rho^3}{k^2(\rho^2-\mu^2)}\,\frac{6}{k^3}\,\frac{\mu(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\,\frac{\rho^4+3\rho^2+\mu^2-5\mu^2\rho^2}{\rho^2-\mu^2}\right.$$

$$+\frac{3\mu\rho^2(1-\rho^2)}{k(\rho^2-\mu^2)}\,\frac{6}{k^4}\,\frac{\omega\rho}{(\rho^2-\mu^2)^3}\,(\rho^4+\rho^2+3\mu^2-5\mu^2\rho^2)$$

$$\left.+\frac{2}{\omega}\cdot\frac{3\mu\rho^2(1-\rho^2)}{k(\rho^2-\mu^2)}\,\frac{6}{k^2}\cdot\frac{(1-\rho^2)\rho}{(\rho^2-\mu^2)}\right\}$$

$$=\frac{\rho}{\mu}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{18}{k^5}\,\frac{(1-\rho^2)\mu\rho^3}{(\rho^2-\mu^2)^2}\left\{\underbrace{-\omega\frac{(\rho^4+3\rho^2+\mu^2-5\mu^2\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}+\omega\frac{\rho^4+\rho^2+3\mu^2-5\mu^2\rho^2}{(\rho^2-\mu^2)^2}+\frac{2(1-\rho^2)k^2}{\omega}}_{=\left\{\omega\frac{2(\mu^2-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}+2k^2(1-\rho^2)\right\}}\right\}$$

$$=\frac{\rho}{\mu}\,\frac{18}{k^3}\,\frac{(1-\rho^2)\mu\rho^3}{(\rho^2-\mu^2)^2}\left\{-\frac{2}{k^2}\,\frac{1}{\rho^2-\mu^2}+\frac{2(1-\rho^2)}{\omega^2}\right\} \qquad \omega^2=-k^2(1-\mu^2)(1-\rho^2)$$

$$=\frac{\rho}{\mu}\,\frac{36}{k^5}\,\frac{(1-\rho^2)\mu\rho^3}{(\rho^2-\mu^2)}\left\{-\frac{1}{\rho^2-\mu^2}-\frac{1}{1-\mu^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{h^2(\rho^2-p^2)} \left\{ \frac{2n\,\rho^m}{(\rho^2-p^2)^{n+1}} \Big[\underbrace{2(n+1)(p^2+\rho^2-1) + (2m+1)(1-\rho^2) + 1 - p^2}_{} \Big] - \frac{m(m-1)}{(\rho^2-p^2)^n}\, \rho^{m-2}(1-\rho^2) \right\}$$

$$\Big[(1-\rho^2)(\underbrace{2m+1-2n-2}_{[2(m-n)-1]}) + 1 + p^2(2n+1)\Big]$$

$$= p^2(2n+1) - \rho^2[2(m-n)-1] + 2(m-n)$$

Fex. $m=1,\ n=1$:

$$Df = \frac{1}{h^2(\rho^2-p^2)} \left\{ \frac{2\rho}{(\rho^2-p^2)^2}\left[3p^2 + \rho^2\right] \right\}$$

$m=3,\ n=1$:

$$Df = \frac{1}{h^2(\rho^2-p^2)} \left\{ \frac{2\rho^3}{(\rho^2-p^2)^2}\left[3p^2 - 3\rho^2 + 4\right] - \frac{6(1-\rho^2)\rho}{\rho^2-p^2} \right\}$$

$$3p^2 + 3p^2\rho^2 - 3\rho^4 + 4\rho^2 - 3\underbrace{(1-\rho^2)(\rho^2-p^2)}_{\rho^2-p^2-\rho^4+\rho^2p^2}$$

$$= \rho^2 + 3p^2$$

$$D = \frac{\rho^{m-2}}{h^2(\rho^2-p^2)^{n+2}} \Big[\underbrace{2n\rho^2\big((2n+1)p^2 + (1-2m+2n)\rho^2 + 2(m-n)\big) - m(m-1)(1-\rho^2)(\rho^2-p^2)}_{}\Big]$$

$$[2n(2n+1) - m(m-1)]\rho^2p^2 + [2n(1-2m+2n) + m(m-1)]\rho^4 +$$

$$+ [4n(m-n) - m(m-1)]\rho^2 + m(m-1)p^2$$

$$\Delta f = \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} - (1-\rho^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}\right]$$

$$f = \frac{\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\mu} = +\frac{2n\mu\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} = +\frac{2n\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^{n+1}} + \frac{4n(n+1)\mu^2\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^{n+2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{m\rho^{m-1}}{(\rho^2-\mu^2)^n} - \frac{2n\rho^{m+1}}{(\rho^2-\mu^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} = \frac{m(m-1)\rho^{m-2}}{(\rho^2-\mu^2)^n} - \frac{2nm\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^{n+1}} - \frac{2n(m+1)\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^{n+1}} + \frac{4n(n+1)\rho^{m+2}}{(\rho^2-\mu^2)^{n+2}}$$

$$\Delta f = \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left[\frac{4n(n+1)}{(\rho^2-\mu^2)^{n+2}}\left[(1-\mu^2)\mu^2\rho^m - (1-\rho^2)\rho^{m+2}\right] + \right.$$

$$\left. \frac{2n\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^{n+1}}\left[(1-\mu^2) + (1-\rho^2)(2m+1)\right] - \frac{m(m-1)}{(\rho^2-\mu^2)^n}\rho^{m-2}(1-\rho^2)\right]$$

$$= \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left\{\frac{4n(n+1)}{(\rho^2-\mu^2)^{n+2}}\rho^m \underbrace{\left[\mu^2-\mu^4-\rho^2+\rho^4\right]}_{=(\rho^2-\mu^2)(\rho^2+\mu^2-1)} + \frac{2n\rho^m}{(\rho^2-\mu^2)^{n+1}}\cdot \frac{\cancel{\left[2m(1-\rho^2)+2-\mu^2-\rho^2\right]}}{\left[(2m+1)(1-\rho^2)+(1-\mu^2)\right]}\right.$$

$$\frac{\partial D_\psi}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{(1-\rho^2)\rho}{\rho^2-\mu^2}\right) = \frac{1}{\rho^2-\mu^2}(1-3\rho^2)\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \frac{\rho(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\cdot\left(2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - 2\mu\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{(\rho^2-\mu^2)^2}\left\{\underbrace{\left[(\rho^2-\mu^2)(1-3\rho^2) - 2\rho^2(1-\rho^2)\right]}_{\rho^2-3\rho^4-\mu^2+3\mu^2\rho^2-2\rho^2+4\rho^4\ =\ \rho^4-\rho^2-\mu^2+3\mu^2\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\omega} + 2\mu\rho(1-\rho^2)\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right\}$$

$$= \frac{1}{k^2(\rho^2-\mu^2)^3}\left\{(\rho^4-\rho^2-\mu^2+3\mu^2\rho^2)\rho\omega - 2\mu\rho(1-\rho^2)\mu\omega\right\}$$

$$= \frac{\omega}{k^2(\rho^2-\mu^2)^3}\left\{\rho^5-\rho^3-3\rho\mu^2+5\mu^2\rho^3 - \cancel{2\mu^2\rho} + \cancel{2\mu^2\rho^3}\right\}$$

$$v\,DD_\psi = \frac{1}{\omega}\left\{ + \frac{3\omega\rho^3\mu(1-\rho^2)}{k^3(\mu^2-\rho^2)(\rho^2-\mu^2)^3}\left\{2\rho^2(\mu^2+\rho^2) + (1-3\rho^2)(\rho^2-\mu^2)\right\} + \right.$$

$$+ \frac{3\mu\rho^2(1-\rho^2)\,\omega\,\left[\rho^5-\rho^3-3\rho\mu^2+5\mu^2\rho^3\right]}{k^3(\rho^2-\mu^2)^4}$$

$$\left. + \frac{\mu\omega}{\cancel{3}}\,\frac{3\mu\rho^2(1-\rho^2)\cancel{(1-\rho^2)}\rho}{k^3(\rho^2-\mu^2)^2(1-\mu^2)\cancel{(1-\rho^2)}}\right\}$$

$$= \frac{3\mu\rho^2(1-\rho^2)}{k^3(\rho^2-\mu^2)^2}\left[\frac{-\rho}{(\rho^2-\mu^2)^2}(5\mu^2\rho^2 + \cancel{2\rho^4} + \rho^2 - \rho^4 - \mu^2 + \cancel{3\mu^2\rho^2}) + \frac{\rho^5-\rho^3-3\mu^2\rho+5\mu^2\rho^3}{(\rho^2-\mu^2)^2} + \frac{\rho}{1-\mu^2}\right]$$

$$= \frac{3\mu\rho^3(1-\rho^2)}{k^3(\rho^2-\mu^2)^2}\left[\frac{-5\mu^2\rho^2 - \rho^2 + \rho^4 + \mu^2 + 5\mu^2\rho^2 - \rho^2 + \rho^4 - 3\mu^2}{(\rho^2-\mu^2)^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\right]$$

$$\shortparallel$$

$$2\rho^4 - 2\rho^2 - 2\mu^2$$

$$= \cancel{\frac{3\mu\rho^3(1-\rho^2)}{k^3(\rho^2-\mu^2)^2}\left[\frac{2(\rho^2)^2}{(\rho^2-\mu^2)} - 2\ 1\right.}$$

$$\omega^2 = -h^2(1-p^2)(1-q^2)$$
$$x^2 = h^2 p^2 q^2$$

$$\frac{\omega^2}{1-q^2} = \cdot\ \frac{x^2}{q^2} - h^2 \qquad \frac{\omega^2}{q^2-1} + \frac{x^2}{q^2} = h^2$$

$$\frac{\omega^2}{\lambda-1} + \frac{x^2}{\lambda} = h^2$$

$$\frac{(\omega^2+x^2)}{h^2}\lambda - \frac{x^2}{h^2} = (\lambda^2-\lambda)$$

$$\lambda^2 - \lambda\left(1+\frac{\omega^2+x^2}{h^2}\right) = -\frac{x^2}{h^2}$$

$$q^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega^2+x^2}{h^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{\omega^2+x^2}{h^2}\right)^2 - \frac{x^2}{h^2}}$$

$$-\nu\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}+\underbrace{\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}-\frac{1}{\omega^2}}_{\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\cdots}{\omega}}\right\}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)}_{=\frac{1}{\omega}D\psi} = \left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\omega}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$-\left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\frac{D\psi}{\omega}$$

$$-\nu\left\{\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{\partial\cdots}{\partial\omega}+\frac{\cdots}{\omega}\right]}_{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial D}{\partial\omega}\right)}\right\}=$$

$$\left[\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\cdots)\right]$$

$$=\nu\left\{\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 D}{\partial\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial D}{\partial\omega}\right\}=$$

$$=\frac{\nu}{\omega}DD\psi=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\frac{D\psi}{\omega}$$

$$\nu DD\psi=\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}D\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\underbrace{\left\{\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}D\psi-\frac{1}{\omega^2}D\psi\right\}}$$

$$\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial\omega}+\frac{\partial^3\psi}{\partial\omega^3}-\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\left[\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial\omega^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\omega}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\psi}{\partial x}\left[\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial\omega}+\frac{\partial^3\psi}{\partial\omega^3}-\frac{2}{\omega}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}+\frac{2}{\omega^2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}-\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]\right\}$$

$$\nu DD\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\frac{D\psi}{\omega}=\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial D}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial D}{\partial\omega}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot D\right\}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial \omega}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial \omega}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial \omega}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial v}{\partial \omega}-\frac{v}{\omega^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial \omega} \qquad \frac{\partial}{\partial x}$$

Isah!

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \omega}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \omega\partial x}\right)+\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \omega}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}+$$

$$+\cancel{\frac{\partial v}{\partial \omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \omega}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}=\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \omega}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{\omega^2}\right)$$

$$\underbrace{-\frac{\nu}{\omega^2}\frac{\partial u}{\partial \omega}}_{=-\frac{\nu}{\omega^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \omega}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

$$u=-\frac{1}{\omega}\frac{\partial \psi}{\partial \omega} \qquad v=\frac{1}{\omega}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$-\zeta=\frac{\partial u}{\partial \omega}-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial \psi}{\partial \omega}=-\frac{1}{\omega}\underbrace{\left[\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\right]}_{D}\psi$$

$$-\nu\left\{\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\right)}_{\left(D+\frac{2}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\right)}\frac{D\psi}{\omega}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\omega^3}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right\}$$

$$\left(D+\frac{2}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\right)\frac{D\psi}{\omega}\ \ldots\ \sim\ =$$

$$=\frac{D^2\psi}{\omega}+D\psi\, D\left(\frac{1}{\omega}\right)+\frac{2}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{D\psi}{\omega}\right)-\frac{1}{\omega^3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

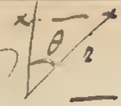
$$=D\psi\cdot\frac{3}{\omega^3}-\frac{2}{\omega^3}D\psi+\frac{2}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial \omega}D\psi-\frac{1}{\omega^3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$=\frac{1}{\omega^3}D\psi+\frac{2}{\omega^2}$$

$$D=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\omega\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\right)$$

In great distance: $\mu = r$

$\varrho = \cos\theta$



$$\psi = \cos^3\theta = \left(\frac{x}{r}\right)^3 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\omega^2}}\right)^3$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \frac{3x\omega}{r^5} = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{r^3} \qquad u = -3\frac{x}{r^5}$$

$$\psi = \varrho^3$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\omega} + \frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\omega} = \frac{\omega}{h^2(\mu^2-\varrho^2)}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial\mu} - \varrho\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\right) = -\frac{3\omega\varrho^3}{h^2(\mu^2-\varrho^2)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x} = \frac{1}{h(\varrho^2-\mu^2)}\left[\varrho(1-\mu^2)\frac{\partial\psi}{\partial\mu} - \mu(1-\varrho^2)\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\right] = -\frac{3\mu\varrho^2(1-\varrho^2)}{h(\varrho^2-\mu^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(1-\varrho^2)\varrho}{\varrho^2-\mu^2}\right) = \frac{1}{h(\varrho^2-\mu^2)}\left\{\varrho(1-\mu^2)\frac{(1-\varrho^2)\varrho\cdot 2\mu}{(\varrho^2-\mu^2)^2} - \frac{\mu(1-\varrho^2)(1-3\varrho^2)}{\varrho^2-\mu^2} + \right.$$

$$\left. + \mu(1-\varrho^2)\frac{(1-\varrho^2)\cdot\varrho\cdot 2\varrho}{(\varrho^2-\mu^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(1-\varrho^2)}{h(\varrho^2-\mu^2)^3}\left\{\underbrace{2\mu\varrho^2(1-\mu^2) + 2\mu\varrho^2(1-\varrho^2)}_{-2\mu\varrho^2(\mu^2+\varrho^2)} - \mu(1-3\varrho^2)(\varrho^2-\mu^2)\right\}.$$

$$= \frac{-\mu(1-\varrho^2)}{h(\varrho^2-\mu^2)^3}\left\{2\varrho^2(\mu^2+\varrho^2) + (1-3\varrho^2)(\varrho^2-\mu^2)\right\}$$

~~$2\mu^2\varrho^2 + 2\varrho^4 + \varrho^2 - \mu^2 - 3\varrho^4 + 3\mu^2\varrho^2 = 5\mu^2\varrho^2 - \varrho^4 + \varrho^2 - \mu^2$~~

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{p^2+q^2+q^4-3p^2q^2}{(q^2-p^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q^2} = -\frac{(2q-6p^2q+4q^3)(q^2-p^2)-(p^2+q^2+q^4-3p^2q^2)4q}{(q^2-p^2)^3} =$$

$$= -\frac{2q^3-6p^2q^3+\cancel{4q^5}-2qp^2+6p^4q-4q^3p^2-4p^2q-4q^3-\cancel{4q^5}+12p^2q^3}{}$$

$$= -\frac{2p^2q^3-2q^3-6p^2q+6p^4q}{(q^2-p^2)^3} = -2q\,\frac{[p^2q^2-q^2+3(p^2-1)p^2]}{}$$

$$= \frac{-2q\,(p^2-1)(q^2+3p^2)}{(q^2-p^2)^3} = 2q(1-p^2)(q^2+3p^2)$$

$$(1-p^2)\;\frac{2q(1-p^2)(q^2+3p^2)}{(q^2-p^2)^3} - \frac{(1-p^2)\,2q\,(1-p^2)(q^2+3p^2)}{(q^2-p^2)^3} = 0$$

stimmt

$$q = \sin\varphi$$

$$\frac{(1-q^2)q}{q^2-p^2} = \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi-\sin^2\chi} = \frac{\sin 2\varphi\,\cos\varphi}{\cos 2\chi-\cos 2\varphi}$$

$$p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{2p^2q(1-p^2)+(p^2+q^2+q^4-3p^2q^2)q}{(q^2-p^2)^2} = \frac{(2p^2-2p^2q^2+p^2+q^2+q^4-3p^2q^2)q}{(q^2-p^2)^2}$$

$$= \frac{q}{(q^2-p^2)^2}(3p^2+q^2-5p^2q^2+q^4)$$

$$(1-p^2)(1-p^2)\,2p^2 + 2p^2q^2+q^4-6p^2q^4+q^6$$

$$-3p^4-\cancel{p^4}+5p^4q^2-\cancel{p^4q^4}$$

130

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1 \qquad b=c \qquad a=0$$

$$r = \rho$$

$$\Delta u = \frac{2}{(\rho-\mu)(r-\mu)}\left[\begin{matrix}\varphi'(\mu) & \frac{\partial u}{\partial \mu} \\ +2\varphi(\mu) & \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}\end{matrix}\right] + \dots$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = -\frac{(1-\mu^2)(1-\rho^2)(\mu^2+3\rho^2)\mu}{h^2(\rho^2-\mu^2)^3}$$

$$\varphi(\lambda) = -\lambda(c-\lambda)^2 = -\mu(c-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = +\frac{(1-\mu^2)(1-\rho^2)(\rho^2+3\mu^2)\rho}{h^2(\rho^2-\mu^2)^3}$$

$$\frac{2}{(\rho-\mu)^2}\ \mu(c-\mu)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} + \dots$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial w^2} = \frac{\mu}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left\{1 + \frac{(1-\mu^2)(1-\rho^2)(\rho^2+3\mu^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\right\}$$

$$\cancel{6(1-\rho^2)\rho - 2\rho^3 = 26\rho + 3\rho^3}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial w^2} = \quad (1-\rho^2)(3\rho^2-1+\mu^2)$$

$$-18(1-\rho^2)\rho - 9\rho^3$$

$$f = \rho^3 \ (?)$$

$$\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} - (1-\rho^2)\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\left[\frac{(1-\rho^2)\rho}{\rho^2-\mu^2}\right] = +\frac{(1-\mu^2)\,2\mu\rho}{(\rho^2-\mu^2)^2} - \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2-\mu^2} + \frac{(1-\rho^2)\,3\rho^2}{\rho^2-\mu^2} + \frac{(1-\rho^2)\,2\rho^2}{(\rho^2-\mu^2)^2}$$

$$f = \rho^3 :$$

$$\frac{(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}\left[2\rho^2 + 4\rho^2 - 1\right]$$

$$\delta\varphi = \delta f = \frac{(1-\rho^2)\rho}{\rho^2-\mu^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1-\rho^2-2\rho^2}{\rho^2-\mu^2} - \frac{2\rho^2(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2} = \frac{\rho^2-\mu^2-3\rho^4+3\mu^2\rho^2-2\rho^2+2\rho^4}{(\rho^2-\mu^2)^2} = -\frac{\rho^4+\rho^2+\mu^2-3\mu^2\rho^2}{(\rho^2-\mu^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{2\mu\rho(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2}$$

$$\frac{\delta f}{\partial \mu^2} = \frac{2\rho(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^2} + \frac{8\mu^2\rho(1-\rho^2)}{(\rho^2-\mu^2)^3} = \frac{2(1-\rho^2)\rho(\rho^2+3\mu^2)}{(\rho^2-\mu^2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{(1-\rho^2)(6\rho^2-1)}{(\rho^2-\mu^2)^2}$$

$$\frac{\delta f}{\partial \rho^2} = \frac{\left[-2\rho(6\rho^2-1) + 12\rho(1-\rho^2)\right](\rho^2-\mu^2) - (1-\rho^2)(6\rho^2-1)\,4\rho}{(\rho^2-\mu^2)^3}$$

$$= 14\rho^3 - 24\rho^5 - 14\rho\mu^2 + 24\rho^3\mu^2 - 24\rho^5 + 28\rho^3 - 4\rho$$

$$= -48\rho^5 + 42\rho^3 + 24\rho^3\mu^2 - 14\rho\mu^2 - 4\rho$$

$$\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\frac{1}{h^4(\mu^2-\rho^2)^2}\left[\rho^2(1-\mu^2)^2 + \frac{\mu^2\omega^2}{h^2}\right] \qquad = (1-\mu^2)(\rho^2-\mu^2)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\frac{1}{h^2(\mu^2-\rho^2)^2}\left[\mu^2(1-\rho^2)^2 + \frac{\rho^2\omega^2}{h^2}\right] \qquad (1-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial\mu\,\partial\rho}\frac{1}{h^2(\mu^2-\rho^2)^2}\left[-\mu\rho(1-\rho^2)(1-\mu^2) \pm \cancel{\frac{\mu\rho\omega^2}{h^2}}\right] = 0$$

$$-\frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial f}{\partial\mu}\frac{\mu\omega}{h^2(\mu^2-\rho^2)} + \frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\rho\omega}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\right]$$

$$(1-\mu^2)\left[\rho^2-\mu^2\rho^2-\mu^2+\mu^2\rho^2\right] \qquad = (1-\mu^2)(\rho^2-\mu^2)$$

$$\rho^2(1-\mu^2)^2 - \mu^2(1-\mu^2)(1-\rho^2) = \cancel{\rho^2 + 2\mu^2\rho^2 + \mu^4\rho^2}$$

$$\cancel{-\mu^2 + \mu^4 + \mu^2\rho^2 - \mu^4\rho^2}$$

$$= \rho^2 - \mu^2 + \mu^2(\mu^2 - \rho^2)$$

$$\cancel{-\mu\rho\left[1-\mu^2-\rho^2+\mu^2\rho^2 - 1\right]}$$

$$\cancel{\mu^2 + 2\mu^2\rho^2 + \mu^2\rho^4} - \rho^2 + \rho^4 + \mu^2\rho^2 - \cancel{\mu^2\rho^4}$$

$$= \mu^2 - \rho^2 + \rho^2$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial\mu^2}\frac{1-\mu^2}{h^2(\rho^2-\mu^2)} + \frac{\partial f}{\partial\rho^2}\frac{1-\rho^2}{h^2(\mu^2-\rho^2)} - \cancel{\frac{\mu}{h^2(\mu^2-\rho^2)}\frac{\partial f}{\partial\mu}} + \cancel{\frac{\rho}{h^2(\mu^2-\rho^2)}\frac{\partial f}{\partial\rho}}$$

$$\boxed{\delta f = \frac{1}{h^2(\rho^2-\mu^2)}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial\mu^2} - (1-\rho^2)\frac{\partial f}{\partial\rho^2}\right\}} + \cancel{\left\{\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} - \rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right\}}$$

(Vide Sampson)

$$\frac{1-\rho^2}{\rho} = \frac{1}{\rho} - \rho$$

$$-\frac{1}{\rho^2}$$

$$+\frac{2}{\rho^3}$$

$1-\mu^2-\rho^2+\mu^2\rho^2$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial \omega}\,d\omega = \frac{\partial f}{\partial \mu}\,d\mu + \frac{\partial f}{\partial \rho}\,d\rho$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mu}{\partial \omega}\,d\omega\right) + \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$1 = h\left(\rho\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$$

$$\rho\,\frac{\partial \mu}{\partial \omega} + \mu\,\frac{\partial \rho}{\partial \omega} = 0$$

$$\mu\frac{\partial \mu}{\partial x} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial x} - \underbrace{\mu\frac{\partial \mu}{\partial x}\rho^2 - \rho\frac{\partial \rho}{\partial x}\mu^2}_{= -\frac{\mu\rho}{h}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \rho}{\partial x} &= +\frac{1}{h}\\ \rho\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{1}{h}\end{aligned}\right|\quad \begin{matrix}\mu & \rho\\ \frac{1}{\mu} & \frac{1}{\rho}\end{matrix}$$

$$1 = \frac{-ih}{\sqrt{}}\left[\mu\frac{\partial \mu}{\partial \omega} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right] - \cancel{\mu\frac{\partial \mu}{\partial \omega}\rho^2 + \rho\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\mu^2}$$

$$1 = \frac{h^2}{\omega}\left[\mu\frac{\partial \mu}{\partial \omega} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right]$$

$$\mu\frac{\partial \mu}{\partial \omega} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial \omega} = \frac{\omega}{h^2}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\mu} - \mu\right)}{\frac{\rho}{\mu} - \frac{\mu}{\rho}} = \frac{1}{h}\,\frac{\rho(1-\mu^2)}{\rho^2-\mu^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{h}\,\frac{\mu(1-\rho^2)}{\mu^2-\rho^2}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \omega} = \frac{\mu\frac{\omega}{h^2}}{\mu^2-\rho^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \omega} = \frac{\rho\frac{\omega}{h^2}}{\rho^2-\mu^2}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \omega} = \frac{1}{h^2}\,\frac{\mu\omega}{\mu^2-\rho^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \omega} = \frac{1}{h^2}\,\frac{\rho\omega}{\rho^2-\mu^2}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu\,\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho\,\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \mu\,\partial \rho}\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \omega}\right)^2 +$$

$$-\frac{1}{\omega}\frac{\partial f}{\partial \omega} =$$

$$\cancel{\frac{\rho^2(1-\mu^2)}{\rho^2-\mu^2} + \frac{\mu^2(1-\rho^2)}{\mu^2-\rho^2} = \frac{\rho^2-\mu^2}{\rho^2-\mu^2}}$$

$x = h p q$

$\omega = i h \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}$

$$\frac{\omega^2}{a-\kappa} + \frac{x^2}{b-\kappa} = 1$$

$$\omega^2(b-\kappa) + x^2(a-\kappa) = (a-\kappa)(b-\kappa)$$

$$\kappa^2 + \kappa(\omega^2 + x^2 - a - b) + ab - \omega^2 b - x^2 a = 0$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = a + b - \omega^2 - x^2 \quad \Big| -a$$

$$\kappa_1 \kappa_2 = ab - \omega^2 b - x^2 a$$

$$x^2(b-a) = b^2 + \kappa_1\kappa_2 - b(\kappa_1+\kappa_2) = (b-\kappa_1)(b-\kappa_2)$$

$$x = \sqrt{\frac{(b-\kappa_1)(b-\kappa_2)}{b-a}} \qquad \omega^2(a-b) = a^2 + \cdots$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(a-\kappa_1)(a-\kappa_2)}{a-b}}$$

ax $x^2 = \sqrt{b-\kappa}$

ax $\omega^2 = \sqrt{a-\kappa}$

excentr. $= a-b$ = const.

$b = 0$ = prawdy przypadek

$$\frac{\omega^2}{a-\kappa} - \frac{x^2}{\kappa} = 1$$

$$h^2 = -k^2$$

$$\frac{\omega^2}{h^2\lambda^2 - h^2} + \frac{x^2}{\lambda^2 h^2} = 1 \qquad \frac{\omega^2}{k^2 - k^2\lambda^2} - \frac{x^2}{k^2\lambda^2} = 1 \qquad \kappa = k^2\lambda^2 = -h^2\lambda^2$$

$$a = k^2 = -h^2$$

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial \omega}}}_{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\frac{h\,q\,(1+p^2)}{p\,\omega} \qquad \underbrace{\frac{\frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial \omega}}}_{\operatorname{tg}\varphi_2} = -\frac{h\,p\,(1+q^2)}{q\,\omega}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} \qquad \perp$$

$$\frac{h^2(1+p^2)(1+q^2)}{\omega^2} = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \omega} - \frac{\sin\varphi}{\omega}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\cos\varphi}{\omega}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = u\frac{\partial}{\partial x} + \left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \omega} - \frac{\sin\varphi}{\omega}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] V\cos\varphi + V\sin\varphi [\;]$$

$$u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = u\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial \omega}$$

$$\left[u\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial \omega}\right](V\cos\varphi) = \left(u\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)\cdot\cos\varphi$$

$$\cancel{+\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\omega} + \frac{1}{\omega^3}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\omega} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\mu}{\omega}\,\delta\delta\psi = \rho\left\{-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial\delta}{\partial x} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta}{\partial\omega} - \frac{1}{\omega^3}\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\delta\right\} =$$

$$\cancel{\delta^2\psi = -\frac{\rho}{\mu\omega}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\omega} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}\delta\psi}$$

$$h\lambda = a\kappa\, x$$

$$h\sqrt{\lambda^2-1} = a\kappa\,\omega$$

$$\frac{\omega^2}{\lambda^2-1} + \frac{x^2}{\lambda^2} = h^2$$

$$\lambda^4 h^2 - \lambda^2(h^2+x^2+\omega^2) + x^2 = 0$$

$$\lambda^4 - \lambda^2\left(1+\frac{x^2+\omega^2}{h^2}\right) + \frac{x^2}{h^2} = 0$$

$$x^2 = h^2\lambda_1^2\lambda_2^2$$

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2 = 1+\frac{x^2+\omega^2}{h^2} = 1+\lambda_1^2\lambda_2^2+\frac{\omega^2}{h^2}$$

$$\begin{matrix}\lambda_1^2\\ \lambda_2^2\end{matrix} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2+\omega^2}{h^2}\right) \pm \sqrt{-\frac{x^2}{h^2}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{x^2+\omega^2}{h^2}\right)^2}$$

$$\omega^2 = -h^2\left(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_2^2\right)$$

$$= -h^2(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)$$

$$\omega = i h\sqrt{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)}$$

$$u = -\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}; \quad V = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$V\cos\omega\left(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega}\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)$$

$$\frac{\Delta u}{4} = \frac{1}{(\varphi-\mu)(\nu-\mu)}\sqrt{\varphi(\mu)}\,\frac{\partial\left[\sqrt{\varphi(\mu)}\,\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} + \cdots$$

$$+ V\sin\omega\left(\sin\omega\frac{\partial}{\partial\omega} + \frac{\cos\omega}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\right) =$$

$$\underbrace{\qquad}_{\frac{1}{2}\varphi'(\mu)\cdot\frac{\partial u}{\partial\mu} + \varphi(\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial\mu^2}}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + 1$$

$$u\frac{\partial V}{\partial x}\cos\omega + V\cos\omega\left(\cos\omega\frac{\partial V}{\partial\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega}\frac{\partial V}{\partial\omega}\right)$$

$$+ V\sin\omega\left(\sin\omega\frac{\partial V}{\partial\omega}\right)$$

$$\varphi(\lambda) = (a-\lambda)(c-\lambda)^2$$

$$\varphi'(\lambda) = -(c-\lambda)^2 - 2(a-\lambda)(c-\lambda) = (c-\lambda)\left[\lambda - c - 2a + 2\lambda\right] = (c-\lambda)(3\lambda - c - 2a)$$

Stokes pag. 17

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial\omega} + \frac{V}{\omega} = 0 \qquad -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial u}{\partial\omega} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial u}{\partial\omega}\right) - \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\partial u}{\partial\omega}\right) \quad \Big|\ \frac{\partial}{\partial\omega}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\omega} = \mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial V}{\partial\omega} - \frac{V}{\omega^2}\right) - \rho\left(u\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial\omega}\right) \quad \Big|\ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right)\left(\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\psi\right)\right) -$$

$$\cancel{-\rho\left(u\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial\omega}\right)} \qquad \cancel{-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial\omega}\frac{\partial u}{\partial\omega} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial\omega}\right)}$$

$$-\rho\left(u\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial\omega} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)}_{=\zeta} =$$

$\cancel{\zeta}\ \delta$

$$\left[\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right) - \rho\left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\right]\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}}{\omega} = 0$$

$$\cancel{\mu\,\frac{\delta\,\frac{\partial\psi}{\partial\omega}}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\delta\psi}{\omega}} \qquad -\frac{\delta}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\delta}{\partial\omega}$$

$$\mu\ \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\delta}{\partial\omega^2} - \frac{2}{\omega^2}\frac{\partial\delta}{\partial\omega} + \frac{2\delta}{\omega^3} - \frac{\delta}{\omega^3} + \cdots - \frac{\delta}{\omega^3}$$

$$\cancel{U' = u_1 + u_2} \qquad \cancel{\nabla^2 u_1} = f_1$$

$$\cancel{\nabla^2 u_2 = \frac{\partial p'}{\partial x}}$$

$$\cancel{\nabla^2 u_2 = \frac{\partial p'}{\partial y}}$$

$$\cancel{\nabla^2 u_3 = \frac{\partial p'}{\partial z}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \mu t f_1 \\ \mathcal{O}_2 &= \mu t f_2 \\ \mathcal{O}_3 &= \mu t f_3 \end{aligned} \right. \qquad \boxed{\Delta^2 A = -\left(\frac{\partial \mathcal{O}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{O}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{O}_3}{\partial z}\right)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} U' &= \frac{\partial A}{\partial x} + \mathcal{O}_1 \\ V' &= \frac{\partial A}{\partial y} + \mathcal{O}_2 \\ W' &= \frac{\partial A}{\partial z} + \mathcal{O}_3 \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= U + U' \\ v &= \\ w &= \end{aligned} \right.$$

$$f_1 = \frac{9}{2}\frac{x^5}{r^{10}} \qquad \mathcal{O}_1 = \frac{3}{16}\left[\frac{5}{3}\frac{x}{r^4} - \frac{10}{3}\frac{x^3}{r^6} - 1\frac{x^5}{r^8}\right]$$

$$f_2 = \frac{9}{2}\frac{x^4 y}{r^{10}} \qquad \mathcal{O}_2 = \frac{3}{16}\left[\frac{y}{r^4} - 2\frac{x^2 y}{r^6} - \frac{x^4 y}{r^8}\right]$$

$$\mathcal{O}_3 = \frac{3}{16}\left[\frac{z}{r^4} - 2\frac{x^2 z}{r^6} - \frac{x^4 z}{r^8}\right]$$

$$\Delta^2 A = -\frac{3}{16}\left[\frac{5}{r^4} + \frac{2}{r^4} z - \frac{20x^2}{r^6} - \frac{4(y^2+z^2)}{r^6} - \frac{10x^2}{r^6} - \frac{4x^2}{r^6} + 20\frac{x^4}{r^8} + 12\frac{x^2(y^2+z^2)}{r^8}\right.$$

$$\left. - \frac{7x^4}{r^8} + \underbrace{\frac{8x^6}{r^{10}} + 8\frac{x^4(y^2+z^2)}{r^{10}}}_{+\,8\frac{x^4}{r^8}}\right]$$

$$\frac{7}{r^4} - \frac{16x^2}{r^6} - \frac{4}{r^4} - \frac{14x^2}{r^6} + 9\frac{x^4}{r^8} + \frac{12x^2}{r^6} + \cancel{\frac{x^4}{r^8}}$$

$$= \frac{3}{r^4} - \frac{18x^2}{r^6} + \frac{9x^4}{r^8} = \frac{3}{r^4}\left[1 - \frac{6x^2}{r^2} + \frac{3x^4}{r^4}\right]$$

$$\Delta^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} + f_1 \qquad \nabla^2 p = \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}_{\phi} = -\nabla^2 P'$$

$$\Delta^2 v = \frac{\partial p}{\partial y} + f_2$$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial p}{\partial z} + f_3$$

$$u = U + U' \qquad \nabla^2 U = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \nabla^2 U' = \frac{\partial P'}{\partial x} + f_1 \qquad \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \nabla^2 V' = \frac{\partial P'}{\partial y} + f_2$$

$$\nabla^2 W = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad \nabla^2 W' = \frac{\partial P'}{\partial z} + f_3$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z}\right) = \nabla^2 P' + \Phi = 0$$

$$U' = \frac{\partial A}{\partial x} + B_1 \qquad \boxed{\Delta^2 A = P'}$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{\nabla^2 \frac{\partial A}{\partial x}} + \nabla^2 B_1 &= \cancel{\frac{\partial P'}{\partial x}} + f_1 \\ \nabla^2 B_2 &= f_2 \\ \nabla^2 B_3 &= f_3 \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} &= -P' \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = \overbrace{\nabla^2 A}^{P'} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 P' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu t\, f_1 + C_1 \\ B_2 &= \mu t\, f_2 + C_2 \\ B_3 &= \mu t\, f_3 + C_3 \end{aligned} \qquad \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial C_2}{\partial y} + \frac{\partial C_3}{\partial z} = -P' - \frac{\partial}{\partial x}(\mu t f_1) \cdots$$

$$\Delta^2 A = \boxed{P' = -\left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right)}$$

$$\cdots - \frac{1}{[illegible]} \cdots \frac{2 [illegible] 1 - [illegible]}{[illegible]}$$

$$\cdots - \left[1 - [illegible]\right] \qquad (1 - [illegible]) \left[1 + [illegible] - \frac{3\delta^2}{2} + [illegible]\right] =$$

$$[illegible] - [illegible]\delta^2 - [illegible] \qquad + [illegible]$$

$$= - [illegible]\delta^2$$

$$2 \frac{[illegible]}{1 - \delta [illegible]^2} = \frac{[illegible] - \delta}{1 - \delta + [illegible]}$$

$$[illegible] 2 + 6\delta + \delta^2 [illegible] (1 - \delta + [illegible])^2 [illegible] (1 + \delta)^4$$

$$= 0.2 [illegible] \quad M = \frac{[illegible]}{[illegible]} \quad [illegible] = [illegible] = [illegible] = 0 [illegible]$$

$$3\left[1+2\frac{\xi}{l}+\frac{\overline{\xi^2+}}{l^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2} = +\frac{3}{8}$$

$$\left[\cancel{1+}2\frac{\xi}{l}\left(1+\frac{x}{l}\right)+\frac{\overline{\xi^2}}{l^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$1+\frac{2x}{l}+\frac{x^2}{l^2}$$

$$-2\left[1-\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}+2\frac{\xi}{l}\left(1-\frac{x}{2l}\right)-y\frac{x\sqrt{3}}{l^2}+\frac{\overline{\xi^2}}{l^2}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 3\left\{1-\frac{\xi}{l}-\frac{1}{2}\frac{\xi^2+\cdots}{l^2}+\frac{3}{8}\frac{4\xi^2}{l^2}\right.$$

$$-\left\{1\right.$$

$n\frac{e}{m}e\frac{\lambda}{c}$ $\quad$ $\frac{e}{m}=10^7$ $\quad$ $e=10^{-20}$ $\quad$ $n \doteq 10^{19}\cdot 1000$ (1 corp. pro atom)

$c = 8.10^6$

$\lambda < 10^{-5}$

$l = 6.10^{-4}$ (cm).

$$\frac{10^{22}\cdot 10^{-13}\cdot 10^{-5}}{8.10^6} = \frac{10^{-2}}{8.} = 10^{-3}$$

---

propo

$$\frac{X}{2}\frac{e}{m}\frac{\lambda}{c} << c$$

$$\lambda << 2\underbrace{\frac{c^2 m}{eX}}$$

$$= \frac{2.6.10^{13}}{10^7.X} = \frac{10^7}{X}$$

X maxim $= \frac{1\ \text{Volt}}{cm}$?

$= 10^8$

HAV

$$\frac{4e}{\frac{3}{2} r^2 \frac{\xi}{}} + \frac{1}{r^3} = \frac{r}{(2)^3}\, 3 \;\; \ldots$$

$$\frac{3}{l^2} - \frac{1}{(l+r)^2} - \frac{2}{(l+\frac{r}{2})^2}$$

$$= 2\frac{r}{l} - 2\frac{r}{l} = 0$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2} = +\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{r^3} \cdot 3\sqrt{3}$$

$$\left(l + \xi - \frac{r}{2}\right)^2$$

$$r = \frac{a}{3}$$

$$U_{el} = e\left[-\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{3}{r_0}\right]$$

$$(l + \xi + r)^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

$$= e\left[\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{(x+r)^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x-\frac{r}{2})^2+(y-\frac{r\sqrt{3}}{2})^2+z^2}\right]$$

$$= \frac{e}{x}\left\{\cancel{3\left[1+\left(\tfrac{y}{x}\right)^2+\left(\tfrac{z}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1+\frac{2r}{x}+\frac{r^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}\right]^{-\frac{1}{2}} - 2\left[1-\frac{r}{x}+\frac{r^2}{4x^2}+\frac{y^2+z^2}{x^2}-\frac{yr\sqrt{3}}{x^2}+\frac{3r^2}{4x^2}\right.}\right.$$

$$= \frac{e}{x}\left\{\cancel{-\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{x^2} + \frac{r}{x} + \frac{r^2}{2x^2} + \frac{y^2+z^2}{2x^2} - \frac{3r^2}{2x^2}}\right.$$

$$\cancel{-\frac{r}{x} + \frac{r^2}{4x^2} + \frac{y^2+z^2}{x^2} + \frac{3r^2}{4x^2} - \frac{yr\sqrt{3}}{x^2} - 2\cdot\frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{x^2} + \frac{3y^2r^2}{x^4}\right)}$$

$$\left(1 + \frac{\xi + r}{l}\right)^2$$

$$= \frac{e}{x}\left\{\frac{r^2}{x^2}\left(\cancel{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) - y\frac{r\sqrt{3}}{x^2} - \frac{9}{4}\frac{y^2r^2}{x^4}\right\}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$1 + \frac{\xi - \frac{r}{2}}{l}$$

$$= \frac{e}{l}\left\{3\left[1 + 2\frac{\xi}{l} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2}\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 + \frac{2\xi}{l} + \frac{2r}{l} + \frac{2r\xi}{l^2} + \frac{\xi^2+r^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. - 2\left[1 + 2\frac{\xi}{l} - \frac{r}{l} + \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{r^2}{4l^2} - \frac{r\xi}{l^2} + \frac{\eta^2+\zeta^2}{l^2} + \frac{3r^2}{4l^2} - \frac{\eta r\sqrt{3}}{l^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{e}{l}\left\{3\left[1 - \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} + \frac{3}{8}\cdot 4\frac{\xi^2}{l^2}\right.\right.$$

$$- \left[1 - \frac{\xi}{l} - \frac{r}{l} - \frac{r\xi}{l^2} - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{r^2}{2l^2} + \frac{3}{8}\left\{4\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{4r^2}{l^2} + \frac{4r^2\xi^2}{l^2} + \frac{8r\xi}{l^2} + \frac{8r\xi^2}{l^3} +\right.\right.$$

$$+ \frac{8r^2\xi}{l^3} + \frac{4r}{l}\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} + \frac{r^4}{l^4} + \frac{2r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{l^4}$$

$$+ \frac{4\xi r^2}{l^3} + \frac{4r^3}{l^3} + \frac{4r^3\xi}{l^4}$$

$$4\sqrt{3} + \frac{100 - 51\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 4 - 12 + 2\sqrt{3} + 400 + 200\sqrt{3} - 204\sqrt{3} - 102.3}{(4+2\sqrt{3})\;(100-51\sqrt{3})} = \frac{-318}{186} \Big\| - 61\sqrt{3}$$

$$504$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \rho \vec{u} = \operatorname{curl} \mathfrak{f}$$
$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \vartheta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \vec{u}] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) = \nabla^2 \vartheta$$
$$\downarrow + \nabla \rho$$
$$\cancel{= \vec{u} \operatorname{div} \rho \vec{u} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}$$
$$\frac{\partial \operatorname{div} \vartheta}{\partial t^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \rho \vec{u})}_{= -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}} = \nabla^2 \operatorname{div} \vartheta$$
$$\therefore \nabla^2 \phi = 0$$

$$\mathfrak{f} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$
$$-\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla \varphi = \vartheta$$
$$-\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \nabla \dot{\varphi} + \underbrace{\vec{u}\left(-\operatorname{div} \dot{\mathfrak{A}} + \nabla^2 \varphi\right)}_{\vec{u}\rho} = -\nabla^2 \mathfrak{A} + \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

$$3 - \frac{1}{\ldots} = -2 \ldots - \frac{5}{2} \over (\ldots)$$

$$\dot{\varphi} = \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

$$\cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \qquad \ddot{\varphi} = \operatorname{div} \dot{\mathfrak{A}} = \operatorname{div} \nabla \varphi - \operatorname{div} \vartheta$$

$$\ddot{\varphi} - \nabla^2 \varphi = \rho \qquad 4\pi \varphi = \int \frac{\rho}{r}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\frac{3}{l^2} - \frac{1}{(l+r)^2} - \frac{2\left(l - \frac{r}{2}\right)}{\sqrt{\left(l - \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2}^{\,3}} = 0 \qquad > 0$$

$$\frac{3}{l^2} - \frac{1}{(l+r)^2} - \frac{2l - r}{(l^2 - lr + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$l = x\sqrt{3}$$
$$1 + \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{2\sqrt{3}-1}{(4-\sqrt{3})^3} =$$

$$\frac{64}{\frac{36}{100}} - 51\sqrt{3}$$

$$3 - \left(1 - 2\frac{r}{l}\right)$$
$$-\left(2 - \frac{r}{l}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\frac{r}{l}\right) = 2\frac{r}{l} + \frac{r}{l} - 3\frac{r}{l}$$

$$1 + \frac{1}{4+2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}-1}{64 - 3.16.\sqrt{3} + 3.4.3 - 3.\sqrt{3}}$$

$$< 0 \qquad = 1 + \frac{1}{4+2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}-1}{100 - 51\sqrt{3}} = \frac{186 - 61\sqrt{3}}{(4+2\sqrt{3})(100-51\sqrt{3})}$$

$$\int y\, \nabla^2 H \, dv = \int y \frac{\partial H}{\partial n} dS - \int \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} \cdots)$$

$\frac{\partial r}{\partial x}$

$$\int \frac{\nabla^2 U}{r} dv = \int \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} dS + \int \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial n} dv$$

$$\int \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dv = \int \underbrace{\Sigma \cos A}_{A_1 \, dx\, dy + A_2} dS$$

$A_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}$

$A_2 =$

$A_3 =$

$\frac{x}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r}$ $\quad U\frac{x}{r^3}$

$$\int \frac{3}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r} dv = -\int \frac{2}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r} dv + \int \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} dv$$

$$= \int \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} dS \left[\cos rx . \cos nx \cdots \right]$$

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} dv + \int \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r} dv = \int \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \cos(nr)\, dS = \int \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \cos nr \, dS$$

$\cancel{4\pi U_0 = \int \frac{1}{r^3} U \cos nr \, dS}$ $\quad \cancel{A_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{r}\right)}$

$\cancel{U\frac{x}{r^3}}$

$$\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

$\cancel{\nabla^2\left(\frac{U}{r}\right) dv = \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{U}{r}\right) \cos nr}$

$$\int \underbrace{\left[\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{U}{r}\right)\right]}_{\cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r}} - \cancel{\frac{2}{r^3}U} + \frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2}\right)}} dv = \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\cdot \cos nr \, dS$$

A_1

$$= -\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r}} + \cancel{\frac{2U}{r^3}}$$

$$\int \left(\nabla^2 U + \frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{1}{r} dv = \int \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\cos nr - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]$$

$4\pi U$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \rho u = \mathrm{curl}\, \mathfrak{h}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = -\,\mathrm{curl}\, \mathfrak{E}$$

$$\nabla(A_1\mathfrak{D}_1 + A_2\mathfrak{D}_2 + A_3\mathfrak{D}_3) = \mathfrak{D}_1\left[i\,\frac{\partial A_1}{\partial x} + j\,\frac{\partial A_1}{\partial y} + \dots\right] + \mathfrak{D}_2\left[i\,\frac{\partial A_2}{\partial x} + j\,\frac{\partial A_2}{\partial y} + \dots\right] + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{d}^2 + \mathfrak{h}^2) = \underbrace{\mathfrak{d}.\mathrm{curl}\,\mathfrak{h}. - \mathfrak{h}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{d}}_{\mathrm{div}\, V\mathfrak{d}\mathfrak{h}} - \mathrm{div}\,\mathfrak{d}\, S\mathfrak{h}u =$$

$$\cancel{\left(\frac{\partial\mathfrak{D}_1}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{D}_2}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{D}_3}{\partial z}\right) S\,\mathfrak{h}u\, dv = \mathfrak{d}_n . S\mathfrak{h}u . dS - \int S(\mathfrak{d}\nabla)\underbrace{S\mathfrak{h}u}\, dv}$$

$$\int \mathrm{div}\, \mathfrak{A}.\mathfrak{B}\, dv = \cancel{\int \mathfrak{B}\, S\mathfrak{A}n\, dS - \int (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}\, dv} \qquad \mathfrak{d}_1\left[u_1 \frac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial x} + \dots \frac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial y} + \right.$$

$$\mathfrak{A}_1 B - \mathfrak{A}_1 \frac{\partial B}{\partial x} \qquad \int S\mathfrak{A}\nabla B \qquad S.\mathfrak{d}.\nabla \underbrace{S\mathfrak{h}u} =$$

$$\mathfrak{A} = \rho \int [\mathfrak{d} + Vu\mathfrak{h}]\, u = \rho\, S\mathfrak{d}u + \cancel{\rho\, S\mathfrak{h}Vu^2}$$

$$= -\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} - S\mathfrak{d}\,\mathrm{curl}\, \mathfrak{h} \qquad S\,\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}$$

$$S\mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\, \mathfrak{E} =$$

$$\Delta V \mathfrak{A} \mathfrak{E} = \text{—}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \Delta^2 \sigma \qquad \sigma = f(r) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$r\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \sigma$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sigma r)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\sigma) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\sigma)$$

$$= \frac{F_1(r+at) + F_1(r-at)}{r} + \frac{1}{a}\left[\frac{\int^{r+at}\Phi(r)\,dr - \int^{r-at} - -}{r}\right]$$

$$\sigma = F_1(r+at) + F_1(r-at) + \frac{1}{a}\left[\int \Phi(r)\,dr - \int \quad - \quad\right]$$

$$\int r \frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2}\,dw = \left[r\frac{\partial}{\partial r}(rU) - \int\frac{\partial(rU)}{\partial r}\,dr\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial(Ur)}{\partial r}\right] = \frac{\partial(Ur)}{\partial r} + r\frac{\partial^2(Ur)}{\partial r^2}$$

$$r\left[r\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2\frac{\partial U}{\partial r}\right]dw =$$

$$\Omega = r\int U\,dw \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \int U\,dw + r\int\frac{\partial U}{\partial r}\,dw$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = 2\int\frac{\partial U}{\partial r}\,dw + r\int\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\,dw$$

$$\Omega' = \frac{1}{r}\int r^2 U\,dw \qquad \frac{\partial \Omega'}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\int r^2 U\,dw + \frac{2}{r}\int rU\,dw + \frac{1}{r}\int r^2\frac{\partial U}{\partial r}\,dw$$

$$\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial r^2}$$

$$\cancel{\Phi = \frac{\partial}{\partial t}(t\omega_1) + t\omega_2 = \omega_1 + t\left(\omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right)}$$

$$\cancel{\frac{\partial \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^3}{\partial t^3}(t\omega_1) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\omega_2)}$$

$$\cancel{= t\frac{\partial^3 \omega_1}{\partial t^3}}$$

$$\Phi_{(x,t)} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ t \int_{(x,0)} \right.$$

$$\Phi(x\, y\, z,\, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ t \int \Phi(x - r\cos\alpha,\ y - r\cos\beta,\ z - r\cos\gamma,\ t = 0)\, d\omega \right\} + t \int \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x - r\cos\alpha \ldots\ ).$$

$$\cancel{\Delta^2 U = 0 \quad U = M(U_x)}$$

$$\cancel{\Delta^2 U' = \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \varphi = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

$$t = 0: \qquad \varphi = f_1 + f_2 = F_1(x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a(f_1' - f_2') = \Phi_{(x)}$$

$$\cancel{f_1 = F_1 + \frac{1}{a}\int \Phi\, dt}$$

$$f_1^{(2)} - f_2^{(2)} = \frac{1}{a}\int \Phi\, dz$$

$$f_1^{(2)} = F_1(z) + \frac{1}{a}\int \Phi(z)\, dz$$

$$\varphi = F_1(x + at) + F_2(x - at) + \frac{1}{a}\left[\int^{x+at} \Phi(z)\, dz - \int^{x-at} \Phi(z)\, dz\right]$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_2} = \nabla\left[\psi \,\mathrm{curl}^2 \zeta - \zeta \,\mathrm{curl}^2 \psi \pm 2\,\mathrm{curl}\,\zeta\,\mathrm{curl}\,\psi\right.$$

$$\psi = \nabla \cancel{\zeta\, u}$$

$$\sin^3\theta\, d\theta = \int (\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2\pi \int \frac{e^2\omega^2}{8\pi}\, \frac{\sin^3\theta}{r^4}\, r^2\, dr\, d\theta \qquad \frac{e^2\omega^2}{3}\; \frac{\quad}{a}$$

$$4\pi N^2\, \omega \sin^2\theta$$

$$4\pi\, \frac{e^2}{16\pi^2 r^4}\, \omega \sin^3\theta \;\; 2\pi r^2\, dr\, d\theta \;=\; \frac{1}{2}\, \frac{e^2\omega}{a} \cdot \frac{4}{3} \cdot \;=\; \frac{2}{3}\, \frac{e^2\omega}{a}$$

$$\frac{e}{r_1^2}\;\; \frac{m}{r_2^2} \;\Bigg\|\;\; \frac{2\pi \cdot em \cdot y^2\, dy\, dx}{(x_1^2+y^2)(x_2^2+y^2)}$$

$$2\pi\, em \int \frac{y^2\, dy\;\; dx}{(x^2+y^2)\left((a-x)^2+y^2\right)}$$

$$\frac{1}{(x^2+y^2)\left((a-x)^2+y^2\right)} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{(a-x)^2+y^2} + \frac{2ax}{(a-x)^2+y^2}$$

$$\| $$

$$\int dx = \frac{\frac{dx}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} \qquad + \frac{a\,d.(a-x)^2}{(a-x)^2+y^2} + \frac{a^2}{\cdots}$$

$$= \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} \cdot \left[1+2a^2\right] + a \lg\left[(a-x)^2+y^2\right]$$

$$\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{y}\left\{ \frac{\pi}{2} + (1+2a^2)\frac{\pi}{2} + a\, \underbrace{\lg \frac{\left[(a-\infty)^2+y^2\right]}{\left[(a+\infty)^2+y^2\right]}}\right\}$$

$$\lim_{x=\infty} \lg \left\{ \frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right\} = \lg \frac{1-\frac{2a}{x}}{1+\frac{2a}{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \mathfrak{u}\, \mathrm{div}\,\mathfrak{d} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{f} \qquad \mathfrak{f} = V\mathfrak{u}\mathfrak{d}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = -\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{e}$$

$$\mathrm{curl}\, V\mathfrak{u}\mathfrak{d} = \mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{d} - \cancel{\mathfrak{d}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{u}} + (\mathfrak{d}\nabla)\mathfrak{u} - (\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{d}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \mathfrak{d}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{u} + (\mathfrak{d}\nabla)\mathfrak{u} - (\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{d} = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_1}{\partial t} + \mathfrak{d}_1\,\mathrm{div}\,\mathfrak{u} + \cancel{\mathfrak{d}_1\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial x}} + \mathfrak{d}_2\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial y} + \mathfrak{d}_3\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial z} - \cancel{\mathfrak{u}_1\frac{\partial \mathfrak{d}_1}{\partial x}} - \mathfrak{u}_2\frac{\partial \mathfrak{d}_1}{\partial y} - \mathfrak{u}_3\frac{\partial \mathfrak{d}_1}{\partial z}$$

$$\mathfrak{y} = V\mathfrak{e}\mathfrak{f}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} = V\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}\mathfrak{f} + V\mathfrak{e}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}$$

$$= V\mathfrak{f}(\mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{d} - \mathrm{curl}\,\mathfrak{f}) - V\mathfrak{e}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{e}$$

$$= \mathrm{div}\,\mathfrak{d}.\ V\mathfrak{f}\mathfrak{u} - V(\mathfrak{f}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{f} + \mathfrak{e}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{e})$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} = V\frac{\partial^2 \mathfrak{e}}{\partial t^2}\mathfrak{f} + 2\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \mathfrak{e}\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{f}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{e} - \mathfrak{e}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{f} \qquad \Big|\ \mathrm{div}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} =$$

$$= -\mathfrak{f}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} - \mathfrak{e}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} - \mathfrak{e}\mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{d}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial t^2} + \mathfrak{u}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\mathfrak{d} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}\mathrm{div}\,\mathfrak{d} = \ldots$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{e}}{\partial t^2} \underbrace{-\,\mathrm{curl}(\mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{d})}_{\mathrm{div}\,\mathfrak{d}.\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{u} + V\nabla\mathrm{div}\,\mathfrak{d}.\,\mathfrak{u}} - \nabla^2\mathfrak{y} = 0$$

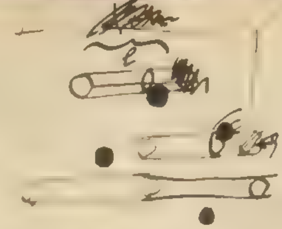
25 fr. 240 d.

~~1 d. = 10.4~~ 1 fr. =

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = J\beta - \alpha n_1 n_2 - u \frac{\partial n_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = J\beta - \alpha n_1 n_2 - v \frac{\partial n_2}{\partial x}$$

$$i = \varepsilon (n_1 u + n_2 v)$$



falls Rekombination nur selten eintritt:

$$n_1 \varrho\, n_2$$

$l =$ mittl. Weg

$l = \lambda_1 + \lambda_2$ falls λ sehr klein gegen u

$l = u + v$ falls λ sehr groß gegen u

$$\frac{dn_1}{dx} = - n_1 \varrho\, n_2$$

$$\int \frac{n_1 \varrho\, n_2\, x\, dx}{\int n_1 \varrho\, n_2\, dx}$$

$$\frac{dn_1}{n_1} = - \varrho\, n_2\, dx$$

$$n_1 = n_{10}\, e^{-\varrho n_2 x}$$

$$\varrho\, n_2 \int e^{-\varrho n_2 x}\, x\, dx = \frac{1}{\varrho\, n_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\varrho\, n_2} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\cdot}$$

$$u = \frac{\varepsilon E}{6\pi \mu a_1} \qquad v = \frac{\varepsilon E}{6\pi \mu a_2}$$

$$\tau = \frac{\lambda}{u} = \frac{1}{\varrho\, n_2 u}$$

$$\cancel{\frac{\partial n}{\partial t} = J}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \beta J - u \frac{\partial n}{\partial x} - n_1 n_2 \alpha u$$

$$p = \frac{d\,\mathfrak{M}}{dt} = \mathfrak{M}_0 \frac{dM}{dt} + M \frac{d\,\mathfrak{M}_0}{dt} \qquad \mathfrak{M} = V\mathfrak{D}\mathfrak{H}$$

$$p_e = \mathfrak{M}_0 \frac{dM}{dt} = \mathfrak{M}_0 \frac{d}{dt} T \int V \mathfrak{D} \mathfrak{H}\, dt$$

$$p_t = M \frac{d\,\mathfrak{M}_0}{dt}$$

$$\mathfrak{H} = 4\pi V \bar{u}\, \vartheta \qquad \mathfrak{M} = 4\pi V \vartheta V \bar{u} \vartheta = \bar{u}\, \vartheta^2 - \vartheta . (\vartheta \bar{u})$$

$$M_2 = u\, \mathfrak{D}^2 \underbrace{(1 - \cos\varphi)}_{\sin\varphi}$$

$$\frac{dN}{dt} = J - \alpha N^2 - \beta i \qquad J = \alpha N^2 - \beta \gamma N E$$

$$i = \gamma N E$$

$$\cancel{\frac{\partial n}{\partial t} = J - \alpha N^2}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = J - \alpha n_1 n_2 \qquad \frac{\partial n_2}{\partial t} = J - \alpha n_1 n_2$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial (n_1 u)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial n_1}{\partial t} = -u \frac{\partial n_1}{\partial x}$$

$$\cancel{i = \varepsilon n_1 \lambda + n_2 v} \qquad \frac{\lambda}{u} : 1 = n_1 \lambda : v$$

$$i = 2 n_1 u \qquad v = \frac{n_1 \lambda}{\frac{\lambda}{u}} = n_1 u$$

$$F = \frac{e}{r^2}\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{1}{\cos\gamma\sqrt{1+\frac{tg^2\gamma}{s}}}\right)^3 = \frac{e}{r^2}\frac{s}{\left(\cos\gamma\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\right)^3} = \frac{e}{r^2}\frac{s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}\cos^2\gamma}^{\,3}}$$

$$1-\frac{u^2}{v^2}\cos^2\gamma = s^{\frac{2}{3}} = 1-\frac{2}{3}\frac{u^2}{v^2}$$

$$\cos^2\gamma = \frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\sin^2\vartheta}{r^4}\,2\pi\,\cancel{\cos\theta}\,d\theta\,r^2\,dr = \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta}_{\frac{2}{3}}\underbrace{\int_a^\infty\frac{dr}{r^2}}_{\frac{1}{a}} = \frac{1}{6a}$$

$$4\pi\left(\frac{d\vartheta}{dt}+u\rho\right) = \operatorname{curl}\mathfrak{H}$$

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = -4\pi v^2\operatorname{curl}\vartheta$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -(u\nabla)\vartheta = \cancel{-(\vartheta\nabla)u}\quad \cancel{} - u\nabla\vartheta - \operatorname{curl}Vu\vartheta$$

$$-4\pi Vu\vartheta = \cancel{}\,\mathfrak{H} + \mathfrak{N}$$

$$\cancel{4\pi v^2 Vu\mathfrak{H} = \vartheta + \mathfrak{G}}$$

$$Vu\mathfrak{H} = 4\pi v^2\vartheta + \mathfrak{G} \qquad V = \frac{A}{\sqrt{\frac{x^2}{s}+y^2+z^2}}$$

$$4\pi v^2\vartheta + 4\pi\underbrace{Vu\,Vu\vartheta}_{u.u\vartheta-\vartheta u^2} = \nabla\varphi$$

$$4\pi(v^2-u^2)\vartheta + 4\pi\,u.u\vartheta = \nabla\varphi$$

$\operatorname{div}\vartheta = 0$

$$4\pi(v^2-u^2)\vartheta_1 = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad s\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\dots = 0$$

$$4\pi(v^2-u^2)\vartheta_2 = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\dots\qquad \dots\frac{\partial V}{\partial z}$$

$\operatorname{curl} \mathfrak{f} = +4\pi \operatorname{curl} V \bar{u} \vartheta$ ~~[illegible]~~

$\operatorname{curl} \vartheta = \cancel{[illegible]} \operatorname{curl} V \bar{u} \mathfrak{f}$

$4\pi v^2 \vartheta = \cancel{[illegible]} V \bar{u} \mathfrak{f} + \mathfrak{b}$ | $\mathfrak{f} = 4\pi V \bar{u} \vartheta + \mathfrak{n}$

~~$\operatorname{curl} \mathfrak{f} = \frac{1}{v^2} \operatorname{curl} V \bar{u} V \mathfrak{f}$~~

$$\operatorname{curl} \vartheta = -4\pi \operatorname{curl} \underbrace{V \bar{u}\, V \bar{u} \vartheta}_{\bar{u}\cdot\bar{u}\vartheta - \vartheta \bar{u}^2}$$

$$4\pi v^2 \vartheta + 4\pi V \bar{u}\, V \bar{u} \vartheta = -\nabla V$$

$$4\pi v^2 \vartheta + 4\pi \bar{u}(\bar{u}\vartheta) - 4\pi u^2 \vartheta = -\nabla V$$

$$4\pi(v^2 - u^2)\vartheta + 4\pi \bar{u}(\bar{u}\vartheta) = -\nabla V$$

$$4\pi(v^2 - u^2)\, \vartheta + 4\pi u^2 \vartheta_1 = -\nabla V$$

~~$v^2 \vartheta_1$~~

$$D_1 = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$D_2 = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$D_3 = -\frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{s}\, \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma} = \sqrt{s} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$2\pi r^2 \sin \alpha\, d\alpha\, F = 2\pi r^2 \sin \gamma\, d\gamma\, F'$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{\sin \alpha\, d\alpha}{\sin \gamma\, d\gamma} = \sqrt{s} \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \gamma}$$

$$4\pi\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \bar{u}\,\mathrm{div}\,\vartheta\right) = \mathrm{curl}\,\mathfrak{f} \qquad = 4\pi\,\frac{d\vartheta}{dt} + 4\pi\rho\,\bar{u}$$

$$\frac{d\mathfrak{f}}{dt} = -\mathrm{curl}\,\vartheta \cdot 4\pi v^2$$

const vel:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -(\bar{u}\nabla)\,\vartheta$$

$$\left(u_1\frac{\partial}{\partial x}+u_2\frac{\partial}{\partial y}+\cdots\right)(i\,a_1 + j\,a_2 + k\,a_3)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right)}$$

$$\nabla_a\, \mathfrak{a}\bar{u} + V\,\mathrm{curl}\,a : \bar{u}$$

$$\nabla(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$i\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x}u_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x}u_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x}u_3 + u_3\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right) - u_2\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \cdots\right)\right\}$$

$$(a\nabla b) = \nabla_b\, ab + V\,\mathrm{curl}\,b.a$$

$$(b\nabla a) = \nabla_a\, ab + V\,\mathrm{curl}\,a.\,b$$

$$(a\nabla)b + (b\nabla)a = \nabla ab - V a\,\mathrm{curl}\,b - Vb\,\mathrm{curl}\,a$$

$$\mathrm{curl}\,Vab = i\left\{\frac{\partial}{\partial y}(a_1b_2 - a_2b_1) - \frac{\partial}{\partial z}(a_3b_1 - a_1b_3)\right.$$

$$= i\left\{a_1\left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}\right) - b_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left. + \left(b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + b_3\frac{\partial}{\partial z}\right)a_1 - \left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)b_1\right\}$$

$$= a\,\nabla b - b\,\nabla a + (b\nabla)a - (a\nabla)b$$

$$(a\nabla)b = (b\nabla)a + a\,\nabla b - b\,\nabla a - \mathrm{curl}\,Vab$$

$$= (b\nabla)a + a\,\mathrm{div}\,b - b\,\mathrm{div}\,a - \mathrm{curl}\,Vab$$

$$(\bar{u}\nabla)\vartheta = \cancel{(\vartheta\nabla)\bar{u}} + \bar{u}\,\mathrm{div}\,\vartheta - \cancel{\vartheta\,\mathrm{div}\,\bar{u}} - \mathrm{curl}\,V\bar{u}\vartheta$$

[illegible]
[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]